



**[Trabalho 976]
APRESENTAÇÃO ORAL**

*GUSTAVO INÁCIO DE MORAES; ALEXANDRE RODRIGUES LOURES.
PUCRS, PORTO ALEGRE - RS - BRASIL;*

**FUNÇÃO CUSTO E SUBSTITUIÇÃO ENTRE INSUMOS NA
AGROPECUÁRIA PARA OS MUNICÍPIOS DE MINAS GERAIS**

Grupo de Pesquisa: Evolução e Estrutura da Agropecuária no Brasil

Resumo: O presente artigo tem por objetivo estimar uma função custo da agropecuária mineira, a partir de dados do censo agropecuário 2006, tendo como amostra as informações dos municípios. A partir desta estimação e utilizando-se do conceito de dualidade, o artigo também examina as relações de substituição entre os insumos aqui levantados: capital, tratores, mão de obra e energia, por diferentes critérios (Direta, Allen, Morishima, Sombra).

Palavras-Chave: Agricultura, Minas Gerais, Função Custo, Elasticidades de Substituição, Municípios

Abstract: This paper estimates and analyzes a cost function for agricultural at Minas Gerais, from national agricultural census data in level of municipalities. From this estimation, we are calculating substitution elasticity's between agricultural inputs: capital, energy, labor and machines, through direct, crossing, Allen, Morishima and Shadow criteria's.

Key-Words: Agriculture, Minas Gerais, Cost Function, Substitution Elasticities, Municipalities

JEL Classification: C31, D24, Q12, Q14

1. Introdução

A agropecuária mineira vivenciou importantes transformações ao longo das décadas recentes. Sua expressão no valor adicionado bruto de Minas Gerais não é tão



significante quanto em outrora, mas ainda é uma importante fonte de riqueza regional, totalizando 9% da economia mineira em 2009, ou R\$ 22,7 bilhões¹ (IBGE, 2011).

Desde os anos setenta, nota-se um decréscimo das áreas de pastagens e um aumento nas áreas de lavouras e, mais importante, de matas e florestas. No entanto, a agropecuária mineira foi capaz de manter sua produtividade em permanente crescimento, ao menos se considerarmos a utilização de terras. A força de trabalho alocada para as atividades agropecuárias encontra-se em patamar próximo ao do início dos anos setenta, ainda que durante os anos oitenta tenha atingido patamar maior. De toda forma, evidencia-se que a produtividade do trabalho também cresceu no período e contribuiu para que a economia agrícola do estado se fortalecesse. Outro indicador que demonstra a maior produtividade da agricultura regional é demonstrado pelo crescente uso de tratores, que atinge um total de 89,6 mil máquinas em 2006 (IBGE, 2007).

Ademais, a atividade agrícola local é uma importante contratadora de mão-de-obra e assim cumpre, em paralelo, uma importante função sócio-econômica ao garantir o rendimento e o sustento de inúmeras famílias. O censo agropecuário aponta que 1,860 milhão trabalhavam na agropecuária em 2006, ou o equivalente a quase 10% da população ou, ainda, quase os mesmos 10% da força de trabalho concentrada na agricultura em território brasileiro (IBGE, 2008).

A tabela 1 demonstra a evolução dos principais indicadores da agropecuária mineira ao longo dos diferentes censos agrícolas.

Tabela 1 – Evolução dos indicadores da agropecuária de Minas Gerais

	1970	1975	1980	1985	1995	2006
Área Total (milhões de ha)	42,0	44,6	46,3	45,8	40,8	35,7
Lavouras (milhões de ha)	3,5	4,0	4,7	5,3	4,1	6,9
Pastagens (milhões de ha)	29,7	31,9	29,6	28,9	25,3	20,5
Matas (milhões de ha)	3,9	4,6	7,2	7,2	7,4	8,8
Pessoal Ocup. (milhões)	1,979	2,190	2,284	2,660	2,000	1,861
Tratores	10.187	22.685	49.428	60.421	89.667	89.789
Bovinos (milhões)	15,1	20,0	19,5	19,9	20,0	21,0
Bubalinos	6.672	9.903	17.095	25.747	20.207	25.481
Caprinos	86.512	90.202	80.416	95.434	61.414	77.651
Ovinos (em mil unidades)	135,1	112,1	91,4	106,9	125,2	225,5
Suínos (milhões)	3,277	3,629	3,214	3,008	2,631	3,610
Aves (milhões)	23,221	32,483	50,901	45,185	67,998	84,960
Produção Leite Vaca (em bilhões de litros)	1,836	2,740	3,420	3,772	5,499	5,893
Produção leite cabra (em milhares de litros)	–	606	685	3.010	2.062	2.214
Produção de lã (toneladas)	43	29	19	15	5	31
Ovos (milhões de dúzias)	60,2	106,1	144,3	151,9	201,5	254,8

Fonte: Dados da Tabela 1.3.17 em IBGE (2007)

¹ Neste valor foram somadas as atividades agrícolas, silvicultura e exploração florestal, além de pecuária.



Na tabela 2 esses números são confrontados entre si perfazendo indicadores propostos de produtividade. É possível notar, finalmente a intensidade dos aumentos de produtividade na agropecuária mineira. Dois períodos, em especial, se caracterizam por uma evolução expressiva dos indicadores. O primeiro se dá entre 1975 e 1980 e o segundo durante a década recente entre 1995 e 2006.

Note que enquanto há trinta anos um trabalhador, em média, correspondia a 2 hectares de áreas de lavouras, hoje temos um indicador próximo a 4 hectares por trabalhador. No caso de tratores o salto de produtividade está mais concentrado entre 1975 e 1980, embora desde então o número de aparelhos por área tenha se elevado. Em particular, o ritmo de incorporação de tratores à produção foi mais intenso do que a evolução no número de trabalhadores, sugerindo uma substituição, em sintonia com o processo econômico, destes por aqueles. Contudo, em período recente, ou seja desde 1995, a relação número de trabalhadores por número de tratores mantém-se relativamente estável, sugerindo um limite, talvez conjuntural, para o processo de substituição.

Tabela 2 – Índice de Evolução Técnica da Agropecuária de MG

	1970	1975	1980	1985	1995	2006
[Pessoal Ocupado / Área de lavouras]	0,56	0,55	0,48	0,50	0,48	0,27
[Tratores / Área de lavouras] (x 1000)	2,87	5,69	10,35	11,31	21,49	12,99
[Bovinos / Área de pastagens]	0,51	0,63	0,66	0,69	0,79	1,02
Unidade Animal ²	1,96	1,59	1,51	1,45	1,26	0,98
[Pessoal Ocupado / Tratores]	194,53	96,53	46,22	44,02	22,31	20,72

Fonte: Dados elaborados a partir de números da Tabela 1.3.17 em IBGE (2007)

De qualquer maneira, essas são impressões relativas a uma evolução temporal. A partir dos dados do censo agropecuário, realizado pelo IBGE em 2006, é possível examinar o problema da inter-relação entre os insumos de um ponto de vista geográfico. Por essa proposta, a partir de dados de cada um dos municípios mineiros, é possível enxergar a relação entre tratores, energia, mão de obra e capital (terra e outros elementos) na produção agropecuária do estado. Essa é uma informação importante para a elaboração de políticas e de gestão privada, também. Na medida em que se identifica a inter-relação média presente na agropecuária, esforços no sentido de induzir modificações necessárias por crises e/ou conjunturas específicas serão mais profícuos.

Portanto, o objetivo deste artigo é estimar a partir das informações dos municípios mineiros uma função custo da agropecuária mineira e calcular as elasticidades entre os insumos, apontando relações de complementaridade ou substitubilidade.

² Esta é uma medida inversa à linha anterior. Portanto, corresponde a área necessária para uma cabeça.



Além desta introdução, optou-se por uma estrutura na qual na segunda seção discutir-se-á o referencial teórico relacionado à função custo. Na terceira seção, os dados e os resultados da estimação são apresentados e discutidos em perspectiva. Na última seção, comentários conclusivos são realizados.

Estudos que contemplam a estimação de funções custo para diferentes objetivos podem ser encontrados em Lau e Yotopoulos (1971, 1972), Antle (1984), Albuquerque (1987), Garcia e Ferreira Filho (2004), Conte e Ferreira Filho (2007), Gomes e Ferreira Filho (2007), Ishii et alii (2007). Alguns como Antle (1984) utilizam-se de séries em painel, ao passo que a maior parte dos estudos brasileiros dedica-se a estudos em *cross-section*. BARBOSA (1985) também ilustra algumas das aplicações para o Brasil. Por vezes, o objetivo não é apenas extrair as relações de elasticidades entre os insumos, mas também obter as possibilidades de ganho de escala em propriedades. Como na amostra desse artigo trabalhamos com municípios, a possibilidade de se calcular escalas produtivas ótimas foi descartada, restando, no entanto a oportunidade de cálculo das elasticidades dos insumos.

Em uma variante, SIDHU e BAANANTE (1981) também calculam a elasticidade de demanda por insumos e a elasticidade de oferta para uma amostra de produtores do Punjab indiano através do uso da função lucro. MULLIBEAUX (1978) também pela ótica da função lucro constrói uma análise para o setor bancário. Ainda como lembram McFADDEN (1978), CHAMBERS (1988), SILBERBERG (1990) e VARIAN (1992) há equivalência entre a estimação da função lucro e função custo, tal como existe entre a função de produção e a função custo, também.

2. Referencial teórico

A relação de dualidade existente entre a função de custo e a função de produção, proveniente da teoria microeconômica dos custos, autoriza o estudo do processo produtivo também através da função custo, alternativamente à própria função de produção.

De acordo com BINSWANGER (1974), este estudo através da função custo leva algumas vantagens em relação à função de produção, pois 1. não é necessário impor homogeneidade de grau um no processo produtivo para se estimar as equações. Isso ocorre, pois a função custo é linearmente homogênea nos preços dos fatores de produção; 2. em geral, na estimação das funções de produção têm-se os preços dos fatores como variáveis independentes, ao invés das quantidades. Para a maioria das firmas as quantidades dos fatores a serem empregadas não são variáveis exógenas ao processo. Dessa forma os tomadores de decisões agem de acordo com os preços dos fatores deixando que as quantidades sejam determinadas endogenamente; e 3. ao se usar a função custo não é necessário inverter a matriz de coeficientes da função de produção estimada para se calcular as estimativas das elasticidades de substituição. Procedimento que deveria ser adotado caso se utilizasse a função de produção (BARBOSA, 1985).

2.1. A função custo e a função custo translog

Conforme definido por CHAMBERS (1988), a função custo é dada por:

$$c(w,y) = \min_{x>0} \{w \cdot x : x \in V(y)\} \quad (1)$$

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



Onde w é um vetor dos preços dos fatores de produção, x é um vetor de quantidade de insumos, $V(y)$ é um conjunto de possibilidade de produção convexo, fechado e não vazio e $c(w,y)$ é o mínimo custo de produção de y dado um vetor de preços w .

A descrição do problema de minimização de custo e as estimativas das elasticidades e substituição foram feitas com base em BINSWANGER (1974). De acordo com esse autor o problema de minimização de custo seria:

$$\text{Min } c = \sum x_i w_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

sujeito a

$$Y_0 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

Sendo Y_0 a produção dada de um bem de acordo com uma determinada tecnologia $f(x_i)$.

Assumindo que a função de produção $f(x_i)$, seja contínua e possua derivadas contínuas, em sendo respeitadas as condições de primeira e segunda ordem – para esta última o determinante do Hessiano Orlado deve ser negativo para que se atinja o mínimo – a condição de primeira ordem garante que a quantidade obtida é a de mínimo custo.

$$x_i = x_i^*(w_1, w_2, \dots, w_n, y_0) \quad (4) \quad i = 1, \dots, n$$

x_i^* é a quantidade de mínimo custo em relação aos preços dos insumos e nível de produção. Substituindo (4) em (2) tem-se:

$$C^* = g(Y, w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (5)$$

Esta função, conhecida como fronteira de preço do fator, assegura que o mínimo custo para cada combinação dos preços dos insumos corresponde a uma cesta de insumos de mínimo custo. É fácil de se verificar que C^* é linearmente homogênea nos preços dos insumos, ou seja, se o preço de todos os insumos forem dobrados o custo também dobrará.

De acordo com o lema de Shephard a diferenciação da função de mínimo custo dual (C^*) em relação ao preço do fator i se obtém a demanda do insumo i de mínimo custo (DIEWERT, 1971) (SILBERBERG, 1990):

$$\partial C^*(y,w) / \partial w_i = x_i \quad (6)$$

Como a função de custo é homogênea de grau 1 nos preços dos insumos, a demanda derivada de mínimo custo é homogênea de grau zero em seus preços, ou seja, a demanda dos fatores só é afetada por mudanças relativas dos preços.

Para se estimar a função custo, no entanto, será utilizada a função translog – transcendental logarítmica. Esta tem sido muito usada nos trabalhos recentes de economia da produção por ser flexível e poder aproximar uma função arbitrária contínua e duplamente diferenciável (CHAMBERS, 1988). Sua forma é escrita como o logaritmo da expansão da série de Taylor:

$$\ln C^* = \beta_0 + \beta_y y + \sum \beta_i \ln w_i + \frac{1}{2} \sum \sum \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j + \sum \gamma_{iy} \ln w_i \ln y + \frac{1}{2} \beta_{yy} (\ln y)^2 \quad (7)$$

As derivadas primeiras e segundas em $\ln(\cdot) = 0$, seriam:

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



$$\frac{\partial \ln C^*}{\partial \ln y}|_0 = \beta_y \quad ; \quad \frac{\partial \ln C^*}{\partial \ln w_i}|_0 = \beta_i \quad ; \quad \frac{\partial^2 \ln C^*}{(\partial \ln w_i \partial \ln w_j)}|_0 = \gamma_{ij} \quad ; \\ \frac{\partial^2 \ln C^*}{(\partial \ln w_i \partial \ln w_y)}|_0 = \gamma_{iy}; \quad (8)$$

O teorema de Young garante a igualdade das derivadas cruzadas em (7), portanto na função translog:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad (9)$$

Já a homogeneidade linear da função custo translog requer que a somatória dos coeficientes β_i sejam iguais a 1; e que a soma dos coeficientes γ_{iy} em i sejam iguais a zero, assim como a soma dos coeficientes γ_{ij} em i e em j .

Para que a função custo translog respeite a propriedade da monotonicidade, é necessário que as parcelas dos custos sejam não-negativas. A concavidade pode ser comprovada através das elasticidades parciais de Allen. Se as elasticidades parciais diretas de Allen forem positivas, então a função custo translog é côncava (GARCIA e FERREIRA FILHO, 2004).

A parcela do custo do insumo i pode ser obtida diferenciando a função custo translog em relação ao preço do insumo i :

$$\frac{\partial \ln C^*(y, w)}{\partial w_i} = \frac{\partial C^*(y, w)}{\partial w_i} \frac{w_i}{C^*} \quad (10)$$

Pelo lema de Shephard, a equação (5) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \ln C^*(y, w)}{\partial w_i} = x_i(w_i/C^*) = S_i \quad (11)$$

Onde S_i é a parcela do bem i em relação ao custo total (C^*). A derivada do custo em relação ao preço do insumo também pode ser visto de acordo com as derivadas parciais:

$$\frac{\partial \ln C^*(y, w)}{\partial w_i} = \beta_i + \frac{1}{2} \sum \gamma_{ij} \ln w_j + \gamma_{iy} \ln y = S_i \quad (11)$$

Tomando as parcelas de todos os insumos tem-se um conjunto de n equações que, segundo BINSWANGER (1974), devem ser utilizadas para se estimar as elasticidades.

Este mesmo autor define as elasticidades de preço diretas e cruzadas (η_{ii} , η_{ij}), as elasticidades de substituição de Allen (σ_{ii} , σ_{ij}), o desvio padrão das elasticidades preços (Se) e o valor estatístico do valor t-Student parâmetros dos testes de significância as elasticidades de Morishima (σ_{ij}^M), como:

$$\eta_{ii} = (\gamma_{ii}/S_i) + S_i - 1 \quad (12) \quad \eta_{ij} = (\gamma_{ij}/S_i) + S_j;$$

$$\sigma_{ii} = \eta_{ii}/S_i \quad (13) \quad \sigma_{ij} = \eta_{ij}/S_j;$$

$$Se_{\eta_{ij}} = Se_{\gamma_{ij}}/S_i \quad (14)$$

$$t = (\eta_{ij}/Se_{\eta_{ij}})\gamma_{ii} + 1 \quad (15)$$

Ao passo que CHAMBERS (1988) define a elasticidade de Morishima, como:

$$\sigma_{ij}^M = S_j(\sigma_{ij} - \sigma_{ii}) = \eta_{ij} - \eta_{jj} \quad (16)$$

Finalmente, como terceiro critério podemos definir ainda uma terceira medida de substituição entre os fatores, dada pela elasticidade sombra (σ_{ij}^s), medida que apresenta simetria, expressa em termos das elasticidades de Morishima, conforme CHAMBERS (1988):

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



$$\sigma^{s;ij} = \left(\frac{S_i}{S_j + S_i} \right) \sigma^{m;ij} + \left(\frac{S_j}{S_j + S_i} \right) \sigma^{m;ji} \quad (16')$$

Destaque-se, ademais, que algumas particularidades emergem das medidas de Allen e Morishima, por exemplo, o fato de a primeira ser simétrica, ao passo que a última não apresenta esta propriedade³. Finalmente vale notar que as elasticidades de Allen e Morishima podem apresentar resultados distintos quanto à classificação entre substitubilidade e complementaridade entre os fatores (SHARMA, 2002).

Como destacam HE e SHARMA (1994), o conceito de Allen não considera a curvatura da isoquanta e não pode ser interpretado *stricto sensu* dentro da taxa marginal de substituição. Já a medida de Morishima teria maior proximidade com as características desejadas por Hicks, quando este desenvolveu o conceito de substituição entre dois insumos, por levar em conta a participação relativa dos insumos e medir a curvatura da isoquanta.

2.2. Modelo Analítico

Na análise foram considerados quatro fatores de produção: energia (E), capital (K), tratores (T) e mão de obra (M). Os preços desses fatores são representados por w_E^* , w_K^* , w_T^* , w_M^* . Já as parcelas dos custos com cada grupo de insumos em relação ao custo total foram definidas como sendo S_e, S_k, S_t, S_m . Finalmente, Y representa o nível de produção, aqui expresso no valor da produção indicado por IBGE (2007)

O preço da energia por município foi calculado a partir da razão entre o gasto com este item e o consumo em megawatt-hora (Mwh), informação disponibilizada por IBGE (2007). Assim, expressa o custo do megawatt-hora (Mwh) nas propriedades rurais de cada município.

Com a mesma lógica, foi possível obter o preço da mão de obra, representado pela razão entre a despesa com mão de obra e o número em centenas de trabalhadores, homens e mulheres, membros da família ou empregados próprios, por município.

Para o preço dos tratores a apuração envolveu a soma das despesas com combustíveis e aluguéis de máquina e sua ponderação pelo número em dezenas de tratores total. IBGE (2007) divulga a quantidade de tratores separados em duas categorias, aqueles com mais de 100 cavalos de potência no motor e aqueles abaixo desta potência. Optou-se por se trabalhar esse indicador agregado, mesmo porque na maioria absoluta dos municípios há predominância dos tratores abaixo de 100 cavalos de potência. Como se trata de um insumo importante para a produtividade da propriedade agrícola, preferiu-se apartá-lo ao invés de considerá-lo como um item de capital, pois participa mais decisivamente do processo produtivo.

Por fim, a apuração do preço do capital envolveu a soma das despesas de despesas com serviços, adubos, corretivos, sementes, agrotóxicos, armazenamento, transporte, compra de animais medicamentos, sal e rações, matérias primas agro-

³ A elasticidade de Allen constitui-se numa elasticidade do tipo um insumo, um preço, ou seja é estabelecida a variação de um insumo frente a variação de um preço. Por seu turno, a elasticidade de Morishima, constitui-se em um exemplo de elasticidade dois insumos, um preço, ou seja, é medida a variação de dois insumos frente à variação de um preço.



industriais, impostos e juros e despesas financeiras. Como item de ponderação tomou-se a área total em milhares de hectares dedicada à lavoura permanente, temporária e pecuária.

Realizadas essas transformações, pode-se tomar a média das parcelas de custo de cada um dos componentes, apresentado na tabela 3.

Tabela 3 – Participação das Despesas dos Insumos na Agropecuária para os Municípios Mineiros - 2006

Insumo	Participação
Capital	58,30%
Mão de Obra	26,54%
Energia	8,47%
Tratores	6,69%

Fonte: dados da Pesquisa a partir de dados de IBGE(2007)

Substituindo essas variáveis na função custo translog e nas parcelas dos custos, descritas anteriormente, chega-se ao sistema de equação sem restrições a seguir:

$$\begin{aligned} \ln C = & \beta_0 + \beta_y \ln y + \beta_K \ln w_K + \beta_E \ln w_E + \beta_T \ln w_T + \beta_M \ln w_M + \frac{1}{2} \gamma_{KK} \ln w_K \ln w_K + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{EE} \ln w_E \ln w_E + \frac{1}{2} \gamma_{TT} \ln w_T \ln w_T + \frac{1}{2} \gamma_{MM} \ln w_M \ln w_M + \frac{1}{2} \gamma_{KE} \ln w_K \ln w_E + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{KT} \ln w_K \ln w_T + \frac{1}{2} \gamma_{KM} \ln w_K \ln w_M + \frac{1}{2} \gamma_{ET} \ln w_E \ln w_T + \frac{1}{2} \gamma_{ME} \ln w_M \ln w_E + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{TE} \ln w_T \ln w_E + \frac{1}{2} \beta_{yy} \ln y \ln y + \frac{1}{2} \gamma_{YK} \ln y \ln w_K + \frac{1}{2} \gamma_{YT} \ln y \ln w_T + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{YE} \ln y \ln w_E + \frac{1}{2} \gamma_{YM} \ln y \ln w_M + \varepsilon \end{aligned} \quad (17)$$

$$S_K = -\frac{w_K X_K}{C} = \beta_K + \gamma_{KK} \ln w_K + \gamma_{KE} \ln w_E + \gamma_{KT} \ln w_T + \gamma_{KM} \ln w_M + \gamma_{YK} \ln y \quad (18)$$

$$S_E = -\frac{w_E X_E}{C} = \beta_E + \gamma_{EE} \ln w_E + \gamma_{EK} \ln w_K + \gamma_{ET} \ln w_T + \gamma_{EM} \ln w_M + \gamma_{YE} \ln y \quad (19)$$

$$S_T = -\frac{w_T X_T}{C} = \beta_T + \gamma_{TK} \ln w_K + \gamma_{TE} \ln w_E + \gamma_{TT} \ln w_T + \gamma_{TM} \ln w_M + \gamma_{YT} \ln y \quad (20)$$

$$S_M = -\frac{w_M X_M}{C} = \beta_M + \gamma_{MK} \ln w_K + \gamma_{MT} \ln w_T + \gamma_{ME} \ln w_E + \gamma_{ME} \ln w_E + \gamma_{MY} \ln y \quad (21)$$

Optou-se pela forma trans-logarítmica, configuração flexível que não impõe um formato específico para a função custo, proposta por CHRISTENSEN *et alli* (1971, 1973). A forma *translog* constitui-se numa aproximação diferencial de segunda ordem, em um ponto do espaço de possibilidades, com termos convertidos para seus respectivos logaritmos naturais, mantendo as propriedades inerentes à função custo.

A estimação das funções custo, neste artigo, segue a tradicional metodologia empregada na literatura, via SUR (Seemingly Unrelated Regressions), método proposto por ZELLNER (1962). A razão principal para sua utilização decorre do fato da equação

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



que representa o somatório do custo e as equações que representam as parcelas do custo ter algumas das variáveis independentes em comum. Desse modo, o erro das equações está, provavelmente, correlacionado, justificando o uso do procedimento. O teste de Breusch-Pagan é utilizado para comprovar a relação de dependência entre os resíduos das diferentes equações do sistema.

É preciso notar que haverá o problema de singularidade, pois $S_K + S_E + S_T + S_M = 1$. Para solucionar o problema de singularidade, uma das equações foi suprimida do modelo. Neste caso, a equação escolhida foi a equação correspondente à parcela de custos de capital, embora o sistema de equações possua solução idêntica, qualquer que seja a parcela de custos que se opte em extrair (GREENE, 2000).

Empiricamente, a normalização das equações, requeridas por essas inserções, é feita pelo insumo capital, para que se evite singularidade no sistema de equações. A escolha é realizada de forma arbitrária e qualquer que fosse o insumo escolhido o resultado do sistema não se alteraria. De tal forma que o modelo a ser estimado resulte no conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \ln C^* = & \beta_0 + \beta_y \ln y + \beta_E \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) + \beta_T \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \beta_M \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{EE} \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{TT} \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{MM} \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{ET} \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{EM} \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{TM} \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{YE} \ln y \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{YT} \ln y \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{YM} \ln y \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \frac{1}{2} \beta_{YY} \ln y \ln y + \\ & + \varepsilon \end{aligned} \quad (17')$$

Uma vez que a soma das parcelas dos gastos com cada um dos insumos é igual a um, algo semelhante é necessário ser feito com as funções de custo, nesse caso, suprimindo a função de parcela gasta com a alimentação.

$$S_E = \beta_E + \gamma_{EE} \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) + \gamma_{ET} \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \gamma_{EM} \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \gamma_{YE} \ln y \quad (19')$$

$$S_T = \beta_T + \gamma_{TT} \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \gamma_{TE} \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) + \gamma_{TM} \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \gamma_{YT} \ln y \quad (20')$$

$$S_M = \beta_M + \gamma_{MM} \ln \left(\frac{w_M}{w_K} \right) + \gamma_{ME} \ln \left(\frac{w_E}{w_K} \right) + \gamma_{MT} \ln \left(\frac{w_T}{w_K} \right) + \gamma_{YM} \ln y \quad (21')$$

3. Resultados e Discussão

Os resultados do sistema de equações acima descrito, ou seja, da função custo translog e das equações de parcelas de custo são apresentados a seguir. Note que no sistema de equações as seguintes restrições entre as parcelas e a equação translog foram respeitadas, em vista do Teorema de Young:

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



$$\gamma_{TM} (\text{translog}) = \gamma_{TM} (\text{parcela de mão de obra}) \quad (22)$$

$$\gamma_{EM} (\text{translog}) = \gamma_{EM} (\text{parcela de mão de obra}) \quad (23)$$

$$\gamma_{TE} (\text{translog}) = \gamma_{TE} (\text{parcela de tratores}) \quad (24)$$

$$\gamma_{TM} (\text{parcela de mão de obra}) = \gamma_{TM} (\text{parcela de tratores}) \quad (25)$$

$$\gamma_{TE} (\text{parcela de tratores}) = \gamma_{TE} (\text{parcela de energia}) \quad (26)$$

$$\gamma_{ME} (\text{parcela de energia}) = \gamma_{ME} (\text{parcela de mão de obra}) \quad (27)$$

Ademais, a estimação foi realizada através do estimador de máxima verossimilhança do S.U.R.. Como ressalta Binswanger (1974) esses parâmetros não possuem nenhum significado *a priori*, sendo auxiliares no cálculo das elasticidades.

Tabela 4. Coeficientes estimados da função custo translog

Coeficiente	Valor	Erro-padrão	z	P> z	Mín 95%	Máx 95%
β_0	0,848148	0,837856	1,01	0,311	-0,794020	2,490316
β_Y	0,002789	0,018709	0,15	0,881	-0,033880	0,039458
β_T	0,829367	0,204057	4,06	0,000	0,429422	1,229312
β_M	-0,383500	0,272623	-1,41	0,160	-0,917830	0,150836
β_E	-0,969030	0,326213	-2,97	0,003	-1,608390	-0,329660
γ_{EE}	0,042350	0,021438	1,98	0,048	0,000332	0,084368
γ_{TT}	-0,010680	0,021693	-0,49	0,622	-0,053200	0,031834
γ_{MM}	0,068333	0,024709	2,77	0,006	0,019905	0,116761
γ_{ET}	0,149362	0,051497	2,9	0,004	0,048430	0,250294
γ_{EM}	-0,007340	0,0525	-0,14	0,889	-0,110240	0,095560
γ_{TM}	-0,061180	0,043114	-1,42	0,156	-0,145680	0,023324
γ_{EY}	0,040435	0,048517	0,83	0,405	-0,054660	0,135527
γ_{TY}	-0,184250	0,02984	-6,17	0,000	-0,242730	-0,125760
γ_{MY}	0,098744	0,043625	2,26	0,024	0,013240	0,184247
γ_{YY}	0,002789	0,018709	0,15	0,881	-0,033880	0,039458

Fonte: resultados da pesquisa.

Tabela 5. Parâmetros relativos à equação da parcela de mão de obra

Coeficiente	Valor	Erro-padrão	z	P> z	Mín 95%	Máx 95%
β_M	-31,10720	4,083184	-7,62	0,000	-39,1101	-23,1043
γ_{MY}	-0,37260	0,658508	-0,57	0,572	-1,66325	0,91805

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



γ_{EM}	-0,00734	0,052500	-0,14	0,889	-0,11024	0,09556
γ_{TM}	-0,06118	0,043114	-1,42	0,156	-0,14568	0,02332
γ_{MM}	15,64884	0,768000	20,38	0,000	14,14359	17,15409

Fonte: resultado da pesquisa

Tabela 6. Tabela. Parâmetros relativos à equação da parcela de tratores

Coefficiente	Valor	Erro-padrão	z	P> z 	Mín 95%	Máx 95%
B_T	-13,3824	1,780343	-7,52	0,000	-16,8718	-9,892990
γ_{TY}	0,31697	0,264718	1,20	0,231	-0,20187	0,835807
γ_{ET}	0,14936	0,051497	2,90	0,004	0,04843	0,250294
γ_{TT}	4,03432	0,263711	15,30	0,000	3,51746	4,551184
γ_{TM}	-0,06118	0,043114	-1,42	0,156	-0,14568	0,023324

Fonte: resultado da pesquisa

Tabela 7. Parâmetros relativos à equação da parcela de energia

Coefficiente	Valor	Erro-padrão	z	P> z 	Mín 95%	Máx 95%
B_E	-20,95120	2,751887	-7,61	0,000	-26,34480	-15,55760
γ_{EY}	-1,93980	0,407780	-4,76	0,000	-2,739040	-1,14057
γ_{EE}	9,55712	0,537883	17,77	0,000	8,502886	10,61135
γ_{ET}	0,14936	0,051497	2,90	0,004	0,048430	0,25029
γ_{EM}	-0,00734	0,052500	-0,14	0,889	-0,110240	0,09556

Fonte: resultado da pesquisa

Tabela 8. Parâmetros relativos à equação da parcela de energia

	R²	Obs.	Parâmetros	χ^2	P> 0
Translog	0,7566	831	13	3564,61	0,0000
Parcela de mão de obra	0,3659	831	4	420,60	0,0000
Parcela de energia	0,2381	831	4	252,72	0,0000
Parcela de tratores	0,3108	831	4	377,74	0,0000

Fonte: resultado da pesquisa

Tabela 9. Teste de validade do sistema S.U.R. / Correlação entre os resíduos

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012
Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



	Translog	Parcela Mão de Obra	Parcela Tratores	Parcela Energia
Translog	1			
Parcela Mão de Obra	-0,1685	1		
Parcela Tratores	-0,2818	-0,1902	1	
Parcela Energia	-0,1203	-0,044	-0,0154	1

Teste de Independência de Breusch-Pagan $\chi^2 = 136,684$; P = 0,0000

Fonte: resultado da pesquisa

Com a estimação das elasticidades-preço direta e das elasticidades de Allen direta puderam comprovar que a função custo *translog* é côncava, já que os valores encontrados para essas elasticidades foram negativos.

Tabela 10. Elasticidade-preço direta e cruzada

	Pcapital	Pmão de obra	Ptratores	Penergia
Qcapital	-0,58850	-26,45786	-7,00406	-16,55124
Qmão de obra	+0,58371	-0,47713 (-5,12587)	-0,16363 (-1,00748)	+0,057047 (0,28844)
Qtratores	-0,57653	-0,64988 (-1,00748)	-1,09299 (-3,36764)	+2,319411 (3,01032)
Qenergia	-1,59403	+0,178807 (0,28844)	+1,83047 (3,01032)	-0,41525 (-1,64044)

Fonte: resultado da pesquisa

Como se pode notar na tabela acima, todos as elasticidades-preço foram menor que um, significando que elas são inelásticas. Alguns destaques podem ser dados. O primeiro refere-se à variação da quantidade de ração demandada dado o aumento de 1% no preço dos outros insumos, 0,008%. Isso se deve principalmente pelo fato de a ração participar com quase 90% dos custos operacionais. Outro a ser mencionado é a elasticidade-preço direta da mão-de-obra, muito próximo de 1. Isso mostra que uma interferência externa por aumento de salário, seria compensado pelo aumento do desemprego causado pela atividade nas mesmas proporções.

Abaixo dos valores das elasticidades está o valor do teste t, percebe-se que em todos os casos os valores são significantes com 99% de probabilidade ($t_0 = 1,667$, para g.l.=70 e 99% de probabilidade).

A seguir é apresentada a tabela com as elasticidades de Allen, a qual é simétrica. Na diagonal principal encontram-se os valores da elasticidade direta. Valores negativos indicam complementaridade e positivos uma relação de substituição.

Tabela 11. Elasticidades direta e cruzada de substituição de Allen

	Pcapital	Pmão de obra	Ptratores	Penergia
Qcapital	-1,00935	+1,00118	-0,98886	-2,73407

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



Qmão de obra	-1,797436	-2,44824 (2,43007)	+0,67360 (2,33531)
Qtratores		-16,35313	+27,38705 (9,09771)
Qenergia			-4,90319

Fonte: resultado da pesquisa

A interpretação desses valores pode ser feita da seguinte forma: considerando a relação entre ração e mão de obra, se houver uma queda de 1% na relação entre o preço desses dois insumos (w_f/w_l) a razão entre a quantidade de ração e a quantidade de mão-de-obra (f/l) diminuirá 0,94%. Através da tabela é possível notar que a relação de substituição entre ração e mão-de-obra, bem como entre mão-de-obra e os outros insumos é bem forte, com valores muito próximos de 1.

De forma complementar a essa análise são apresentados na Tabela 12 os valores das elasticidades de Morishima.

Tabela 12. Elasticidade de substituição de Morishima.

	Pcapital	Pmão de obra	Ptratores	Penergia
Qcapital	–	+0,74289	+1,02690	+0,18370
Qmão de obra	+1,06084	–	+0,92936	+0,47229
Qtratores	+0,51646	-0,17275	–	+2,73466
Qenergia	-1,17877	+0,65593	+2,92346	–

Fonte: resultado da pesquisa.

A elasticidade de Morishima possui uma interpretação um pouco diferente da elasticidade de Allen, no entanto dois bens substitutos em Allen também serão substitutos em Morishima. A interpretação para esta última pode ser descrita da seguinte forma, quando houver um aumento de 1% no preço da ração a razão entre a quantidade dos outros insumos e a quantidade de ração aumentará em 0,11%; no entanto quando o preço da ração aumentar 1%, a razão entre esses dois bens aumentará em 0,17%.

Tabela 13. Elasticidade de substituição sombra.

	Pcapital	Pmão de obra	Ptratores	Penergia
Qcapital	–	+0,84236	+0,97440	+0,01089
Qmão de obra		–	+0,70767	+0,51671

Vitória, 22 a 25 de julho de 2012

Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural



Qtratores	-	+2,84018
Qenergia	-	-

Fonte: resultado da pesquisa.

Para o caso das elasticidades sombra o resultado nos mostra uma relação de complementaridade entre os insumos, tendo como amostra os municípios de Minas Gerais. Destaque-se especialmente o resultado elástico para a relação tratores-energia.

5. Conclusão

Percebem-se pela estimação realizada neste artigo algumas relações entre os insumos utilizados na agropecuária, nos municípios mineiros. A partir de dados do Censo Agropecuário de 2006 é possível perceber algumas características da importante produção local.

Em especial, a relação de substituição e complementaridade apontada para os insumos pelos critérios de Allen e Morishima são coerentes entre si. Assim, percebe-se que no estado de Minas Gerais

Os resultados podem ser úteis, também, para o cálculo da escala produtiva ótima. Entretanto, acreditamos que para tal, seria necessário dispor dos dados no nível das propriedades, ao invés dos municípios. Também não podemos afirmar que os resultados aqui obtidos sejam passíveis de extrapolação para outros estados, necessitando-se uma análise particular caso a caso, em especial para os estados com geografia e dinâmica econômica distintas à Minas Gerais. Todavia, foi possível determinar como se dá a relação entre os insumos mais importantes utilizados na agricultura mineira e esta informação pode ser útil para a definição de políticas agrícolas para o Estado.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, M.C.C.. Uma análise translog sobre mudança tecnológica e efeitos de escala: um caso de modernização eficiente. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Rio de Janeiro, v.1, n. 17, p. 191-220, 1987.

ALLEN, R.G.D.. **Mathematical Economics**. London; New York: Macmillan; St. Martin's Press, 1957.

ANTLE, J.M. The structure of U.S. Agricultural Technology, 1910-78. **American Journal of Agricultural Economics**, Malden, v. 66, N. 4, p. 414-421, novembro, 1984.

BARBOSA, F.H. **Microeconomia: Teoria, Modelos Econométricos e Aplicações à Economia Brasileira**. Rio de Janeiro: IPEA/INPES, 1985, 534 p..



BINSWANGER, Hans P.. A Cost Function Approach to the Measurement of Elasticities of Factor Demand and Elasticities of Factor Demand. **American Journal of Agricultural Economics**, Malden, v.53, p. 377-386, 1974.

CHAMBERS, Richard G.. **Applied Production Analysis: A Dual Approach**. Cambridge University Press, Cambridge, 1988, 331 p..

CHRISTENSEN, L.R.& JORGENSON; D.W.& LAU L.J. Conjugate duality and the transcendental logarithmic function. **Econometrica**, v. 39, n. 3, p.255-256, julho, 1971.
_____. Transcendental logarithmic production frontiers. **The Review of Economics and Statistics**, v.55, n.1, p.28-45, Fevereiro 1973

CONTE, L. ; FERREIRA FILHO, J. B. S. . Substituição de fatores produtivos na produção de soja no Brasil. **Revista de Economia e Sociologia Rural**, v. 45, p. 475, 2007

DIEWERT, W. E. An application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function. **Journal of Political Economics**, v.79, p. 481-507, maio, 1971.

GARCIA, L. A. F. ; FERREIRA FILHO, J. B. S. . Economias de Escala na Produção de Frangos de Corte no Brasil. **Revista de Economia e Sociologia Rural**, Brasília, v. 43, n. 3, p. 465-484, 2005

GREENE, W.H.. **Econometric Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. 1004p.

GOMES, A. L. ; FERREIRA FILHO, J. B. S. . Economias de escala na produção de leite: uma análise dos estados de Rondônia, Tocantins e Rio de Janeiro. **Revista de Economia e Sociologia Rural**, v. 45, p. 591-620, 2007.

HE, Yijian; SHARMA, S.S.. **The Morishima Elasticity of Substitution for The Profit Function**. Carbondale, IL, Southern Illinois University, 1994. Disponível em: <http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpmi/9502002.html>

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **Censo Agropecuário 2006**. Rio de Janeiro: IBGE, 2007.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **Matriz Insumo-produto 2005**. Rio de Janeiro: IBGE, 2008.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **Contas Nacionais e Regionais 2009**. Rio de Janeiro: IBGE, 2011.

ISHII, K.S.; SOUZA, M.J.P.; FERREIRA FILHO, J.B.S.. A Oferta e a Estrutura de Demanda de Fatores de Produção da Sojicultura Brasileira: O Modelo da Função Lucro Translog. . In: **Anais do Congresso Brasileiro de Economia e Sociologia Rural, 2007**, Londrina, 2007.

LAU, L. J.& YOTOPOULOS, P.A. A test for relative Efficiency and an application to Indian agriculture. **American Economic Review**, v. 61, p.94-109, março, 1971.
_____. Profit, supply and factor demand functions. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 54, n. 1, p.11-18, fevereiro,1972.

McFADDEN, D.. Cost, Revenue and Profit Function in **Production Functions: A Dual Approach to Theory and Applications**, FUSS, M. e MCFADDEN, D. (orgs.), Nova York, North-Holland, 1978.



MULLIBEAUX D.J. Economies of scale and organizational efficiency in banking: A profit function approach. **The Journal of Finance**, v 33, n. 1, p. 259-280, março, 1978.

SHARMA, S.C. The Morishima Elasticity Of Substitution For The Variable Profit Function And The Demand For Imports In The United States. **International Economic Review**, v. 43, p.115-135, 2002.

SIDHU, S.S. & BAANANTE, C.. Estimating Farm-Level Input Demand and Wheat Supply in the Indian Punjab Using a Translog Profit Function. **American Journal of Agricultural Economics**, Malden, v. 63, n. 2, p. 237-246,1981.

SILBERBERG, E.. **The Structure of Economics: A mathematical analysis**. 2ª Ed., Nova York, McGraw-Hill, 1990. 686p.

VARIAN, H.R.. **Microeconomic Analysis**, 3ª Ed.. New York: W.W. Norton, 1992, 556 p..

ZELLNER, A. An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. **Journal of the American Statistical Association**, n. 57 p. 348-368, junho, 1962.