

EXERCÍCIOS 2.1

ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ ΛΙΝΕΑΡ, ΒΕΡΜΑΝΤ ΚΟΥΜΑΝ,
ΕΔΙΤΟΡΑ ΓΥΝΑΙΚΕΙΑ, 3^η ΕΔΙΤΡΑ

EXERCÍCIO 11 (ΠΑΘΗΜΑ 67)

$$\begin{aligned} 11.A \quad & \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 2(3) \\ & = \lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 6 \\ & = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$11.B \quad \lambda I_2 = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(1) & \lambda(0) \\ \lambda(0) & \lambda(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\lambda I_2 - A] &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 0 - 2 \\ 0 - (-1) & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} &= (\lambda - 5)(\lambda - 1) - (-2)(1) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 5\lambda + 5 + 2 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 7 \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 16 (PÁGINA 67)

16.A COMO A MATRIZ DADA É TRIANGULAR INFERIOR
PODEMOS CALCULAR O DETERMINANTE DA MATRIZ FAZENDO
APENAS O PRODUTO DOS ELEMENTOS DA DIAGONAL PRINCIPAL.
ENTÃO

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4(2)(-3)(5) = -240$$

EXERCÍCIO 17 (PÁGINA 67)

17. A

$$\begin{array}{c|cccc|c|cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & & & 3 & 2 & 4 & -4 & \\ 3 & -2 & 1 & 5 & & =(-1) & 1 & -2 & 3 & 5 & = \\ -2 & 0 & 1 & -3 & & & 1 & 0 & -2 & -3 & \\ 8 & -2 & 6 & 4 & & & 6 & -2 & 8 & 4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ l_1 \leftrightarrow l_3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|c|cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & & & 3 & 2 & 4 & -4 & \\ 3 & -2 & 1 & 5 & & & 1 & -2 & 3 & 5 & = \\ -2 & 0 & 1 & -3 & & & 1 & 0 & -2 & -3 & \\ 6 & -2 & 8 & 4 & & & 6 & -2 & 8 & 4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ l_1 \leftrightarrow l_2 \end{array}$$
$$\begin{array}{c|cccc|c|cccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 & & & 1 & -2 & 3 & 5 & \\ 3 & 2 & 4 & -5 & & & 0 & 8 & -5 & -19 & \\ 1 & 0 & -2 & -3 & & & 1 & 0 & -2 & -3 & \\ 6 & -2 & 8 & 4 & & & 6 & -2 & 8 & 4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|c|cccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 & & & 1 & -2 & 3 & 5 & \\ 0 & 8 & -5 & -19 & & & 0 & 8 & -5 & -19 & \\ 0 & 2 & -5 & -8 & & & 0 & 2 & -5 & -8 & \\ 6 & -2 & 8 & 4 & & & 0 & 10 & -10 & -26 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \end{array}$$
$$\begin{array}{c|cccc|c|cccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 & & & 1 & -2 & 3 & 5 & \\ 0 & 2 & -5 & -8 & & & 0 & 2 & -5 & -8 & \\ 0 & 8 & -5 & -19 & & & 0 & 0 & 15 & 13 & \\ 0 & 10 & -10 & -26 & & & 0 & 10 & -10 & -26 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc|c|cccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 & & & 1 & -2 & 3 & 5 & \\ 0 & 2 & -5 & -8 & & & 0 & 2 & -5 & -8 & \\ 0 & 0 & 15 & 13 & & & 0 & 0 & 15 & 13 & \\ 0 & 10 & -10 & -26 & & & 0 & 10 & -10 & -26 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$*(-1)(1)(2)(13)(1) = -30$$

767

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 14 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = *$$

$$\textcircled{17.B} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -9 & 13 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -6 \\ -9 & 13 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 42 & -36 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

COMO A MATRIZ RESULTANTE POSSUI UMA LINHA DE ZEROS SABEMOS QUE O DETERMINANTE É IGUAL A ZERO (DEVIDO A PROPRIADA DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE)

TEOREMA 2, SE UMA LINHA OU UMA COLUNA DE UMA MATRIZ CONSISTE EM ZEROS O DETERMINANTE DESSA MATRIZ SERÁ IGUAL A ZERO.

$\textcircled{17.C}$ COMO ESSA MATRIZ CONSISTE EM UMA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR, ENTÃO, PARA CALCULAR SEU DETERMINANTE BASTA FAZERMOS O PRODUTO DOS ELEMENTOS DA DIAGONAL PRINCIPAL.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(2)(3) = 6$$

EXERCÍCIO 20 (PÁGINA 68)

$$\begin{aligned} 20.A \quad |A^2| &= (|A|)^2 \\ &= (-4)^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20.B \quad |A^4| &= (|A|)^4 \\ &= (-4)^4 \\ &= 256 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20.C \quad |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 27 (PÁGINA 68)

$$O \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad E \quad O \quad |B^T| = |B|, \text{ LOGO:}$$

$$\begin{aligned} |A^{-1} B^T| &= \frac{1}{|A|} \cdot |B| \\ &= \frac{1}{2} \cdot -3 \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO T.3 (PÁGINA 68)

SUPONHA QUE $A = [a_{ij}]$ É MULTIPLICADA POR λ PARA OBTEN
 $B = [b_{ij}]$. ENTÃO $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. LOGO, $B = \lambda A$.

$$\begin{aligned}
 |B| &= \sum (\pm) b_{1j_1} \cdot b_{2j_2} \dots b_{mj_m} \\
 &= \sum (\pm) c_{1j_1} \cdot c_{2j_2} \dots c_{mj_m} \\
 &= c \sum (\pm) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \dots a_{mj_m} \\
 &= c |A|
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIO T.5 (PÁGINA 68)

TEOREMA 2, O DETERMINANTE DE UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES É O PRODUTO DE SEUS DETERMINANTES, OU SEJA:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

SENDO ASSIM;

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$|A| \cdot |B| = |AB|$$

$$|A| \cdot |B| = 0$$

ESSE RESULTADO SÓ É POSSÍVEL SE $|A|$ E/OU $|B|$ FOMEM IGUAL A ZERO.

EXERCÍCIO T.6 (PÁGINA 68)

QUANDO ESSA COMUTAÇÃO DAS MATRIZES FOI POSSÍVEL ($AB = BA$) O $|AB| = |BA|$. POIS PELO TEOREMA TEMOS: O DETERMINANTE DE UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES É O PRODUTO DE SEUS DETERMINANTES, OU SEJA:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$|AB| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |BA|$$

EXERCÍCIO T. 7 (PÁGINA 68)

SENDO,

$$|A| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

E COMO A MATRIZ TEM PELO MENOS UM ELEMENTO NÃO-NULO EM CADA LINHA E EM CADA COLUMA EXISTIRÁ PELO MENOS UM TERMO UMA PARCELA DO DETERMINANTE QUE SERÁ NÃO-NULA.

EXERCÍCIO T. 8 (PÁGINA 68)

$AB = I_n$, ENTÃO $B = A^{-1}$ E $A = B^{-1}$. LOGO, COMO AMBAS AS MATRIZES SÃO NÃO-SINGULARES, TEMOS QUE: $|A| \neq 0$ E $|B| \neq 0$

EXERCÍCIO T. 9 (PÁGINA 68)

T. 9.A SE $A = A^{-1}$ ENTÃO:

$$|A| = |A^{-1}|$$

ENTÃO:

COMO:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A| \cdot |A| = 1$$

$$(|A|)^2 = 1$$

$$\sqrt{(|A|)^2} = \pm \sqrt{1}$$

$$|A| = \pm 1$$

T. 9.3 SE $A^{-1} = A^T$ ENTÃO:

$$|A^{-1}| = |A^T|$$

COMO:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ENTÃO:

$$|A^T| = \frac{1}{|A|}$$

COMO:

$$|A| = |A^T|$$

ENTÃO:

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{|A|} \\ |A| \cdot |A| &= 1 \\ (|A|)^2 &= 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\sqrt{(|A|)^2} = \pm \sqrt{1} \\ &|A| = \pm 1 \end{aligned} \right\}$$

EXERCÍCIO T. 9.0 (PÁGINA 68)

SE $A^2 = A$ ENTÃO:

$$A \cdot A = A$$

ESSE RESULTADO SÓ É POSSÍVEL SE $A = I_n$. LOGO,
 $|A| = 1$

EXERCÍCIO T.11 (PÁGINA 68)

TEOREMA 2, O DETERMINANTE DE UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES É O PRODUTO DE SEUS DETERMINANTES, OU SEJA,

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

TEOREMA 2, OS DETERMINANTES DE UMA MATRIZ E DE SUA TRANSPOSTA SÃO IGUAIS, OU SEJA,

$$|A| = |A^T| \text{ E } |B| = |B^T|$$

ENTÃO:

$$|A^T \cdot B^T| = |A^T| \cdot |B^T|$$

$$= |A| \cdot |B^T|$$

$$= |A^T| \cdot |B|$$

EXERCÍCIO T.12 (PÁGINA 68)

SÃO SEIS OS POSSÍVEIS REARRANJO DESSA MATRIZ:

123 132 312 213 231 321

(+) (-) (+) (-) (+) (-)

177

173

1 / 1

1	a	a ²
1	b	b ²
1	c	c ²

$$\begin{aligned} &= \sum a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= 1(b)(c^2) + a^2(1)(c) + a(b^2)(1) - 1(b^2)(c) - a(1)(c^2) - \\ &\quad - a^2(b)(1) \\ &= bc^2 + a^2c + ab^2 - b^2c - ac^2 - a^2b \\ &= a^2c - ac^2 + ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c \\ &= ac(a-c) + ab(b-a) + bc(c-b) \end{aligned}$$

EXERCÍCIO T.13 (PÁGINA 68)

EXERCÍCIO T.14 (PÁGINA 68)

TEOREMA 2, O DETERMINANTE DE UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES É O PRODUTO DE SEUS DETERMINANTES, OU SEJA,

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

SE $|A| = 0$

ENTÃO:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$= 0 \cdot |B|$$

$$= 0$$

EXERCÍCIO T.15 (PÁGINA 68)

$$A^m = 0$$

$$\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m\text{-VÉZES}} = 0$$

TEOREMA 2, O DETERMINANTE DE UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES É O PRODUTO DE SEUS DETERMINANTES, OU SEJA,

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

ENTÃO:

$$|AA| = |A| \cdot |A|$$

$$|A| \cdot |A| = |AA|$$

$$(|A|)^2 = |0|$$

$$(|A|)^2 = 0$$

$$\sqrt{(|A|)^2} = \pm \sqrt{0}$$

$$|A| = 0$$

EXERCÍCIO 16 (PÁGINA 68)

TEOREMA 3 OS DETERMINANTES DE UMA MATRIZ E DE SUA TRANSPOSTA SÃO IGUAIS, OU SEJA,

$$|A| = |A^T|$$

Como :

$$A^T = -A \Rightarrow A^T = (-1)A$$

ENTÃO:

$$|A^T| = (-1)|A|$$

LOGO:

$$|A| = (-1)|A|$$

SENDO ASSIM:

$$|A| = (-1)|A|$$

$$|A| + (1)|A| = 0$$

$$|A| + |A| = 0$$

$$2|A| = 0$$

$$|A| = \frac{0}{2}$$

$$= 0$$