

EXERCÍCIOS 2.2

→ ALGÉBRICA LINEAR, BENNARD KOLMAN, EDITORA GUANABARA, 3^a EDIÇÃO

EXERCÍCIO 3 (PÁGINA 78)

$$3.A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(-3)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [7(-9)] - [5(-4)] \}$$

$$= (1)(-63 + 20)$$

$$= (1)(-43)$$

$$= -43$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [2(-9)] - [3(-4)] \}$$

$$= (-1)(-18 + 12)$$

$$= (-1)(-6)$$

$$= 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [2(5)] - [3(7)] \}$$

$$= (1)(10 - 21)$$

$$= (1)(-11)$$

$$= -11$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= 1(-43) + 0(6) + 0(-11)$$

$$= -43 + 0 + 0$$

$$= -43$$

3.B

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -12 & 2 & -11 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -12 & 2 & -11 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ (-1)^{1+2} (0) |M_{12}| + (-1)^{2+2} (3) |M_{22}| + (-1)^{3+2} (2) |M_{32}| \}$$

$$= (1) \{ (-1)^3 (0) \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^1 (3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 (2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \}$$

$$= (1) \{ (-1)(0)(-10) + (1)(3)(11) + (-1)(2)(1) \}$$

$$= (1)(0 + 33 - 2)$$

$$= (1)(17)$$

$$= 17$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -12 & 2 & -11 \\ -4 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ (-1)^{1+1} (-12) |M_{11}| + (-1)^{1+2} (2) |M_{12}| + (-1)^{1+3} (-11) |M_{13}| \}$$

$$= (-1) \{ (-1)^2 (-12) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 (2) \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4 (-11) \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \}$$

$$= (-1) \{ (1)(-12)(7) + (-1)(2)(-10) + (1)(-11)(1) \}$$

$$= (-1)(-84 + 20 - 11)$$

$$A_{21} = (-1)(-75) \\ = 75$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| \\ = (-1)^4 \begin{vmatrix} -12 & 2 & -11 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4 \{ (-1)^{1+2}(2) |M_{12}| + (-1)^{2+2}(0) |M_{22}| + (-1)^{3+2}(2) |M_{32}| \} \\ = (-1)^4 \{ (-1)^3(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^4(0) \begin{vmatrix} -12 & -11 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5(2) \begin{vmatrix} -12 & -11 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \} \\ = (-1)^4 \{ (-1)(2)(11) + (1)(0)(-45) + (-1)(2)(-19) \} \\ = (-1)(-22 + 0 + 28) \\ = (-1)(6) \\ = 6$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} |M_{41}| \\ = (-1)^5 \begin{vmatrix} -12 & 2 & -11 \\ 2 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5 \{ (-1)^{1+2}(2) |M_{12}| + (-1)^{2+2}(0) |M_{22}| + (-1)^{3+2}(3) |M_{32}| \} \\ = (-1)^5 \{ (-1)^3(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^4(0) \begin{vmatrix} -12 & -11 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^5(3) \begin{vmatrix} -12 & -11 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \} \\ = (-1)^5 \{ (-1)(2)(8) + (-1)(0)(-20) + (-1)(3)(-19) \} \\ = (-1)(-16 + 0 + 42) \\ = (-1)(26) \\ = -26$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} \\ = 0(17) + 1(75) + 0(6) + 0(-26) \\ = 0 + 75 + 0 + 0 \\ = 75$$

3.C

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \end{matrix} + = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -12 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \end{matrix} + =$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [2(-3)] - [4(-1)] \}$$

$$= (1)(-6 + 4)$$

$$= (1)(-2)$$

$$= -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [(-6)(-3)] - [(-12)(-1)] \}$$

$$= (-1)(-18 + 12)$$

$$= (-1)(-6)$$

$$= 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [(-6)(4)] - [(-12)(2)] \}$$

$$= (1)(-24 + 24)$$

$$= (1)(0)$$

$$= 0$$

$$|A| = A_{11}A_{11} + A_{21}A_{21} + A_{31}A_{31}$$

$$= 0(-2) + 0(6) + (-1)(0)$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

EXERCÍCIO 11 (PÁGINA 79)

11.A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \end{matrix} + = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -10 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} + =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} \\ &= (1) \{ 3(-10) - [(-10)(3)] \} \\ &= (1)(-30 + 30) \\ &= (1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \{ [2(-10)] - [(-3)(3)] \} \\ &= (-1)(-20 + 9) \\ &= (-1)(-11) \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= (-1)^{3+1} |M_{31}| \\ &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -10 \end{vmatrix} \\ &= (1) \{ [2(-10)] - [(-3)(3)] \} \\ &= (1)(-20 + 9) \\ &= (1)(-11) \\ &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= 1(0) + 0(11) + 0(-11) \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$|A| = 0 \Rightarrow$ A MATRIZ É SINGULAR

TEOREMA $\Rightarrow$ UMA MATRIZ A É NÃO-SINGULAR SE E SOMENTE SE $|A| \neq 0$

11.6 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| \\ &= (-1)^2 (2) \\ &= 1(2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| \\ &= (-1)^3 (-1) \\ &= (-1)(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| \\ &= (-1)^3 (3) \\ &= (-1)(3) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| \\ &= (-1)^4 (2) \\ &= (1)(2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} &= 2(2) - [3(-1)] \\ &= 4 - (-3) \\ &= 4 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/7 & -3/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$17.C \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [3(-2)] - [4(1)] \}$$

$$= (1)(-6-4)$$

$$= (1)(-10)$$

$$= -10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [0(-2)] - [4(0)] \}$$

$$= (-1)(0-0)$$

$$= (-1)(0)$$

$$= 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [0(1)] - [3(0)] \}$$

$$= (1)(0-0)$$

$$= (1)(0)$$

$$= 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [0(-2)] - [2(1)] \}$$

$$= (-1)(0-2)$$

$$= (-1)(-2)$$

$$= 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [4(-2)] - [2(0)] \}$$

$$= (1)(-8-0)$$

$$= (1)(-8)$$

$$= -8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [4(1)] - [0(0)] \}$$

$$= (-1)(4-0)$$

$$= (-1)(4)$$

$$= -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [0(4)] - [2(3)] \}$$

$$= (1)(0 - 6)$$

$$= (1)(-6)$$

$$= -6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [4(4)] - [2(0)] \}$$

$$= (-1)(16 - 0)$$

$$= (-1)(16)$$

$$= -16$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}|$$

$$= (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [4(3)] - [0(0)] \}$$

$$= (1)(12 - 0)$$

$$= (1)(12)$$

$$= 12$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & -6 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= -10(4) + 0(0) + 0(0)$$

$$= -40 + 0 + 0$$

$$= -40$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} -10 & 2 & -6 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/20 & 3/20 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1/10 & -3/10 \end{bmatrix}$$

$$93. A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| \\ &= (-1)^2 (0) \\ &= (1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| \\ &= (-1)^3 (2) \\ &= (-1)(2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| \\ &= (-1)^3 (1) \\ &= (-1)(1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| \\ &= (-1)^4 (-3) \\ &= (1)(-3) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} &= (-3)(0) - [1(2)] \\ &= 0 - (2) \\ &= 0 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

13.B

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1) \{ [(-3)(2)] - [0(0)] \} \\ &= (1)(-6 - 0) \\ &= (1)(-6) \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \{ [0(2)] - [0(0)] \} \\ &= (-1)(0 - 0) \\ &= (-1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} |M_{13}| \\ &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1) \{ [0(0)] - [(-3)(0)] \} \\ &= (1)(0 - 0) \\ &= (1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \{ [0(2)] - [0(0)] \} \\ &= (-1)(0 - 0) \\ &= (-1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| \\ &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1) \{ [4(2)] - [0(0)] \} \\ &= (1)(8 - 0) \\ &= (1)(8) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{23} &= (-1)^{2+3} |M_{23}| \\ &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \{ [4(0)] - [0(0)] \} \\ &= (-1)(0 - 0) \\ &= (-1)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

/ /

186

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [0(0)] - [0(-3)] \}$$

$$= (1)(0-0)$$

$$= (1)(0)$$

$$= 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ [4(0)] - [0(0)] \}$$

$$= (-1)(0-0)$$

$$= (-1)(0)$$

$$= 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}|$$

$$= (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ [4(-3)] - [0(0)] \}$$

$$= (1)(-12-0)$$

$$= (1)(-12)$$

$$= -12$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 4(-6) + 0(0) + 0(0)$$

$$= -24 + 0 + 0$$

$$= -24$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= \frac{-1}{24} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

13.C

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}|$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ (-1)^{1+2}(3) |M_{12}| + (-1)^{2+2}(5) |M_{22}| + (-1)^{3+2}(0) |M_{32}| \}$$

$$= (1) \left\{ (-1)^3(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4(5) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5(0) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (1) \{ (-1)(3)(0) + (1)(5)(-6) + (-1)(0)(-6) \}$$

$$= (1)(0 - 30 + 0)$$

$$= (1)(-30)$$

$$= -30$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ (-1)^{3+1}(0) |M_{31}| + (-1)^{3+2}(0) |M_{32}| + (-1)^{3+3}(2) |M_{33}| \}$$

$$= (-1) \{ (-1)^4(0) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5(0) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^6(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \}$$

$$= (-1) \{ (1)(0)(-14) + (-1)(0)(12) + (1)(2)(16) \}$$

$$= (-1)(0 + 0 + 32)$$

$$= (-1)(32)$$

$$= -32$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| + (-1)^{3+2} (1) |M_{32}| + (-1)^{3+3} (2) |M_{33}| \}$$

$$= (1) \left\{ (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 (1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^6 (2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (1) \{ (1)(0)(-6) + (-1)(1)(12) + (1)(2)(0) \}$$

$$= (1)(0 - 12 + 0)$$

$$= (-1)(-12)$$

$$= -12$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} |M_{14}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5 \{ (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| + (-1)^{3+2} (1) |M_{32}| + (-1)^{3+3} (0) |M_{33}| \}$$

$$= (-1)^5 \left\{ (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^5 (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^6 (0) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (-1)^5 \{ (1)(0)(-8) + (-1)(1)(16) + (1)(0)(0) \}$$

$$= (-1)(0 - 16 + 0)$$

$$= (-1)(-16)$$

$$= 16$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \{ (-1)^{3+1} (1) |M_{31}| + (-1)^{3+2} (0) |M_{32}| + (-1)^{3+3} (2) |M_{33}| \}$$

$$= (-1)^3 \left\{ (-1)^4 (1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 (0) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^6 (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right\}$$

189

$$A_{21} = (-1)^1 \{ (1)(1)(-13) + (-1)(0)(1) + (1)(2)(9) \}$$

$$= (-1)(-13 + 0 + 18)$$

$$= (-1)(5)$$

$$= -5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ (-1)^{1+1} (0) |M_{11}| + (-1)^{2+1} (-2) |M_{21}| + (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \}$$

$$= (1) \left\{ (-1)^2 (0) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3 (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (1) \{ (1)(0)(10) + (-1)(-2)(2) + (1)(0)(-13) \}$$

$$= (1)(0 + 4 + 0)$$

$$= (1)(4)$$

$$= 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \{ (-1)^{1+1} (0) |M_{11}| + (-1)^{2+1} (-2) |M_{21}| + (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \}$$

$$= (-1) \left\{ (-1)^2 (0) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3 (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (-1) \{ (1)(0)(0) + (-1)(-2)(1) + (1)(0)(1) \}$$

$$= (-1)(0 + 2 + 0)$$

$$= (-1)(2)$$

$$= -2$$

$$\begin{aligned}
 A_{24} &= (-1)^{2+4} |M_{24}| \\
 &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ (-1)^{1+1} (0) |M_{11}| + (-1)^{2+1} (-2) |M_{21}| + (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \} \\
 &= (1) \{ (-1)^2 (0) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3 (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \} \\
 &= (1) \{ (1)(0)(-3) + (-1)(-2)(-1) + (1)(0)(9) \} \\
 &= (1)(0 - 2 + 0) \\
 &= (1)(-2) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{31} &= (-1)^{3+1} |M_{31}| \\
 &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ (-1)^{3+1} (1) |M_{31}| + (-1)^{3+2} (0) |M_{32}| + (-1)^{3+3} (2) |M_{33}| \} \\
 &= (1) \{ (-1)^4 (1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^5 (0) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^6 (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \} \\
 &= (1) \{ (1)(1)(-5) + (-1)(0)(7) + (1)(2)(7) \} \\
 &= (1)(-5 + 0 + 14) \\
 &= (1)(9) \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{32} &= (-1)^{3+2} |M_{32}| \\
 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \{ (-1)^{1+1} (0) |M_{11}| + (-1)^{2+1} (2) |M_{21}| + (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \} \\
 &= (-1) \{ (-1)^2 (0) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3 (2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{32} &= (-1) \{ (1)(0)(6) + (-1)(2)(2) + (1)(0)(-5) \} \\
 &= (-1)(0 - 4 + 0) \\
 &= (-1)(-4) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{33} &= (-1)^{3+3} |M_{33}| \\
 &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ (-1)^{1+1} (0) |M_{11}| + (-1)^{2+1} (2) |M_{21}| + (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \} \\
 &= (1) \{ (-1)^2 (0) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3 (2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \} \\
 &= (1) \{ (1)(0)(-6) + (-1)(2)(1) + (1)(0)(11) \} \\
 &= (1)(0 - 2 + 0) \\
 &= (1)(-2) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{34} &= (-1)^{3+4} |M_{34}| \\
 &= (-1)^7 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \{ (-1)^{1+1} (0) |M_{11}| + (-1)^{2+1} (1) |M_{21}| + (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \} \\
 &= (-1) \{ (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^5 (1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^6 (0) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \} \\
 &= (-1) \{ (1)(0)(7) + (-1)(1)(-2) + (1)(0)(-4) \} \\
 &= (-1)(0 + 2 + 0) \\
 &= (-1)(2) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} |M_{41}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5 \{ (-1)^{1+1}(2)|M_{11}| + (-1)^{1+2}(1)|M_{12}| + (-1)^{1+3}(3)|M_{13}| \}$$

$$= (-1)^5 \left\{ (-1)^2(2) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(1) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4(3) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (-1)^5 \{ (1)(2)(-14) + (-1)(1)(-6) + (1)(3)(-8) \}$$

$$= (-1)(-28 + 6 - 24)$$

$$= (-1)(-46)$$

$$= 46$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} |M_{42}|$$

$$= (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \{ (-1)^{1+1}(0)|M_{11}| + (-1)^{1+2}(1)|M_{12}| + (-1)^{1+3}(3)|M_{13}| \}$$

$$= (1) \left\{ (-1)^2(0) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4(3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (1) \{ (1)(0)(-14) + (-1)(1)(2) + (1)(3)(16) \}$$

$$= (1)(0 - 2 + 48)$$

$$= (1)(46)$$

$$= 46$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} |M_{43}|$$

$$= (-1)^7 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^7 \{ (-1)^{1+1}(0)|M_{11}| + (-1)^{1+2}(2)|M_{12}| + (-1)^{1+3}(3)|M_{13}| \}$$

$$= (-1)^7 \left\{ (-1)^2(0) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(2) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4(3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 A_{43} &= (-1)^1 \{ (1)(0)(-6) + (-1)(2)(12) + (1)(3)(0) \} \\
 &= (-1)(0 - 24 + 0) \\
 &= (-1)(-24) \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{44} &= (-1)^{4+4} |M_{44}| \\
 &= (-1)^8 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ (-1)^{1+1}(0)|M_{11}| + (-1)^{2+1}(2)|M_{21}| + (-1)^{3+1}(-2)|M_{31}| \} \\
 &= (1) \{ (-1)^2(0) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^3(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4(-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \} \\
 &= (1) \{ (1)(0)(-8) + (-1)(2)(9) + (1)(-2)(7) \} \\
 &= (1)(0 - 18 - 14) \\
 &= (1)(-32) \\
 &= -32
 \end{aligned}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & -3 & 9 & 46 \\ -32 & 4 & 4 & 36 \\ -12 & -2 & -2 & 24 \\ 16 & -2 & -2 & -32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\
 &= 0(-30) + 2(-32) + 1(-12) + 3(16) \\
 &= 0 - 64 - 12 + 48 \\
 &= -28
 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{28} \begin{bmatrix} -30 & -5 & 9 & 46 \\ -32 & 4 & 4 & 36 \\ -12 & -2 & -2 & 24 \\ 16 & -2 & -2 & -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{14} & \frac{5}{28} & -\frac{9}{28} & -\frac{23}{14} \\ \frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO 16 (PÁGINA 80)

$$\begin{aligned} 16.A) \quad & \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = [(\lambda - 2)(\lambda - 3)] - [2(3)] \\ & = (\lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6) - (6) \\ & = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 6 \\ & = \lambda^2 - 5\lambda \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda = \frac{0}{\lambda - 5}$$

$$= 0$$

$$\lambda(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda - 5 = \frac{0}{\lambda} \rightarrow \lambda = 5$$

$$\lambda - 5 = 0$$

26.13

$$\lambda I_3 = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(1) & \lambda(0) & \lambda(0) \\ \lambda(0) & \lambda(1) & \lambda(0) \\ \lambda(0) & \lambda(0) & \lambda(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$[\lambda I_3 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 - 0 & 0 - (-1) \\ 0 - 2 & \lambda - 0 & 0 - 1 \\ 0 - 0 & 0 - 0 & \lambda - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

199

$$\begin{aligned}
 A_{31} &= (-1)^{3+1} (0) |M_{31}| \\
 &= (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (1)(0)(-\lambda) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

195

$$\begin{aligned}
 A_{32} &= (-1)^{3+2} (0) |M_{32}| \\
 &= (-1)^5 (0) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)(0)(-\lambda+3) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{33} &= (-1)^{3+3} (\lambda+1) |M_{33}| \\
 &= (-1)^6 (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda) \\
 &= \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^2 - \lambda \\
 &= \lambda^3 - \lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} \\
 &= 0(0) + 0(0) + (-1)(\lambda^3 - \lambda) \\
 &= 0 + 0 - \lambda^3 + \lambda
 \end{aligned}$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 1) = 0$$

$$-\lambda^2 + 1 = \frac{0}{\lambda}$$

$$-\lambda^2 + 1 = 0$$

$$-\lambda^2 = -1$$

$$\lambda^2 = \frac{-1}{-1}$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \sqrt{1}$$

$$= 1$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda = \frac{0}{-\lambda^2 + 1}$$

$$= 0$$

EXERCÍCIO 17 (PÁGINA 80)

$$\begin{aligned}
 17.A \quad \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} &= [(\lambda-1)(\lambda-4)] - [(4)(0)] \\
 &= (\lambda^2 - 5\lambda - \lambda + 4) - (0) \\
 &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 0 \\
 &= \lambda^2 - 5\lambda + 4
 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 &= (-5)^2 - 4(1)(4) \\
 &= 25 - 16 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)} \\
 &= \frac{5 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$17.B \quad \lambda I_3 = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(1) & \lambda(0) & \lambda(0) \\ \lambda(0) & \lambda(1) & \lambda(0) \\ \lambda(0) & \lambda(0) & \lambda(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [\lambda I_3 - A] &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda - (-3) & 0 - (-1) & 0 - (-3) \\ 0 - 0 & \lambda - 3 & 0 - 0 \\ 0 - (-2) & 0 - (-1) & \lambda - (-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

197

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}|$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(\lambda-1)$$

$$= -\lambda+1$$

197

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}|$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} \lambda+3 & 3 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(\lambda^2+5\lambda)$$

$$= \lambda^2+5\lambda$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}|$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(\lambda+1)$$

$$= -\lambda-1$$

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= 0(-\lambda+1) + (\lambda-3)(\lambda^2+5\lambda) + 0(-\lambda-1)$$

$$= 0 + \lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda^2 - 15\lambda + 0$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 15\lambda$$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 15\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 15) = 0$$

$$\lambda = \frac{0}{\lambda^2 + 2\lambda - 15}$$

$$= 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = \frac{0}{1}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (2)^2 - 4(1)(-15)$$

$$= 4 + 60$$

$$= 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm 8}{2}$$

3
-5

EXERCÍCIO T.3 (PÁGINA 80)

SEJAM $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ O COFATOR DE a_{ij} E $A = [a_{ij}]$ UMA MATRIZ SIMÉTRICA EM QUE $a_{ij} = a_{ji}$ (OU SEJA, $A = A^T$).

ENTÃO, $A_{ij} = A_{ji}$

SENDO,

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

LOGO, $\text{adj } A = (\text{adj } A)^T$. CARACTERIZANDO UMA MATRIZ SIMÉTRICA.

EXERCÍCIO T.3 (PÁGINA 80)

$$A A^{-1} = I_m$$

TEOREMA 2, O DETERMINANTE DE UM PRODUTO DE DUAS MATRIZES É O PRODUTO DE SEUS DETERMINANTES.

$$|A A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I_m| = 1$$

ESSE RESULTADO SÓ É POSSÍVEL SE $|A|$ E $|A^{-1}|$ FOREM DIFERENTES

DE ZERO ($|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A^{-1}| \neq 0$).

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| \\ &= (-1)^2 (d) \\ &= (1)(d) \\ &= d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| \\ &= (-1)^3 (c) \\ &= (-1)(c) \\ &= -c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| \\ &= (-1)^3 (b) \\ &= (-1)(b) \\ &= -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| \\ &= (-1)^4 (a) \\ &= (1)(a) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO T.G (PÁGINA 80)

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} |M_{11}| \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} \\ &= (1) [b(c^2) - [b^2(c)]] \\ &= (1)(bc^2 - b^2c) \\ &= bc^2 - b^2c = bc(c-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} |M_{12}| \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & b^2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) [1(c^2) - [b^2(1)]] \\ &= (-1)(c^2 - b^2) \\ &= b^2 - c^2 = (b+c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= (-1)^{1+3} |M_{13}| \\
 &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ [1(c)] - [b(1)] \} \\
 &= (1)(c - b) \\
 &= c - b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{21} &= (-1)^{2+1} |M_{21}| \\
 &= (-1)^3 \begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \{ [a(c^2)] - [a^2(c)] \} \\
 &= (-1)(ac^2 - a^2c) \\
 &= a^2c - ac^2 = ac(a - c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= (-1)^{2+2} |M_{22}| \\
 &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ [1(c^2)] - [a^2(1)] \} \\
 &= (1)(c^2 - a^2) \\
 &= c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{23} &= (-1)^{2+3} |M_{23}| \\
 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \{ [1(c)] - [a(1)] \} \\
 &= (-1)(c - a) \\
 &= a - c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{31} &= (-1)^{3+1} |M_{31}| \\
 &= (-1)^4 \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ [a(b^2)] - [a^2(b)] \} \\
 &= (1)(ab^2 - a^2b) \\
 &= ab^2 - a^2b = ab(b - a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{32} &= (-1)^{3+2} |M_{32}| \\
 &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \{ [1(b^2)] - [a^2(1)] \} \\
 &= (-1)(b^2 - a^2) \\
 &= a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{33} &= (-1)^{3+3} |M_{33}| \\
 &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\
 &= (1) \{ [1(b)] - [a(1)] \} \\
 &= (1)(b - a) \\
 &= b - a
 \end{aligned}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ (b+c)(b-c) & (c+a)(c-a) & (a+b)(a-b) \\ b-c & a-c & b-a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

$$= \frac{1}{(b-a)(c-a)(c-b)} \begin{bmatrix} bc(c-b) & ac(a-c) & ab(b-a) \\ (b+c)(b-c) & (c+a)(c-a) & (a+b)(a-b) \\ c-b & a-c & b-a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{bc}{(b-a)(c-a)} & \frac{ac(a-c)}{(b-a)(c-a)(c-b)} & \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ \frac{(b+c)(b-c)}{(b-a)(c-a)(c-b)} & \frac{c+a}{(b-a)(c-b)} & \frac{(a+b)(a-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} \\ \frac{1}{(b-a)(c-a)} & \frac{a-c}{(b-a)(c-a)(c-b)} & \frac{b-a}{(c-a)(c-b)} \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO 7.7 (PÁGINA 80)

SE A É SINGULAR, ENTÃO, $|A| = 0$.

COMO,

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_m$$

ENTÃO,

$$(\text{adj } A)A = |A|I_m$$

$$\frac{(\text{adj } A)}{|A|} A = I_m$$

COMO,

$$AA^{-1} = I_m$$

ENTÃO,

$$\frac{1}{|A|} A = (\text{adj } A)^{-1}$$

$$\begin{aligned} (\text{adj } A)^{-1} &= \frac{1}{|A|} A \\ &= \frac{1}{0} A \\ &= 0(A) \\ &= 0 \end{aligned}$$

COMO $(\text{adj } A)^{-1}$ NÃO EXISTE A $\text{adj } A$ É SINGULAR.

EXERCÍCIO T.70 (PÁGINA 87)

SE $|A| \neq 0$, A É UMA MATRIZ NÃO-SINGULAR, OU SEJA, EXISTE A^{-1} .

TEOREMA 2, SE UMA MATRIZ TEM UMA INVERSA, ENTÃO A INVERSA É ÚNICA.

SUPONHA B E C SEJAM INVERSA DE A .

$$B = B I_m = B(AC) = (BA)C = (AB)C = I_m C = C$$

ENTÃO,

$$B = C$$

EXERCÍCIO 1.12 (PÁGINA 81)

TEOREMA 2, UMA MATRIZ A É NÃO-SINGULAR SE E SOMENTE SE $|A| \neq 0$

TEOREMA 2, SE $A = [a_{ij}]$ É UMA MATRIZ $n \times n$, ENTÃO:

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_n$$

ASSIM,

$$(\text{adj } A)A = |A|I_n$$

$$(\text{adj } A) \frac{1}{|A|} A = I_n$$

COMO,

$$AA^{-1} = I_n$$

ENTÃO,

$$\frac{1}{|A|} A = (\text{adj } A)^{-1}$$

COMO,

$|A|$ EXISTE

ENTÃO,

$(\text{adj } A)^{-1}$ EXISTE

DA DEFINIÇÃO DE INVERSA DE UMA MATRIZ TEMOS:

UMA MATRIZ $A_{m \times m}$ É CHAMADA NÃO-SINGULAR OU INVERSÍVEL SE EXISTE UMA INVERSA DE A .

ENTÃO,

COMO EXISTE A INVERSA DA $\text{adj } A$, ESSA É UMA MATRIZ NÃO-SINGULAR.

EXERCÍCIOS 1.4 2, ÁLGEBRA LINEAR, BERNARD KOLMAN,
EDITORA GUARABARA, 3ª EDIÇÃO

EXERCÍCIO T.2 (PÁGINA 43)

T.2.A SUPONHA QUE $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ É EQUIVALENTE POR LINHAS A $B = [b_{ij}]_{m \times m}$. OU SEJA, B FOI OBTIDA DE A POR OPERAÇÕES ELEMENTARES FINITAS.

ENTÃO,

SEJA $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ A MATRIZ EM QUE SEÃO EFETUADAS AS OPERAÇÕES ELEMENTARES FINITAS SOBRE AS LINHAS OBTENDO $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ NA FORMA REDUZIDA ESCALONADA POR LINHAS OU SEJA, ESSA MATRIZ É EQUIVALENTE POR LINHAS ÀQUELA PRIMEIRA MATRIZ.

T.2.B DEFINIÇÃO 2, UMA MATRIZ $A_{m \times n}$ É EQUIVALENTE POR LINHAS A UMA MATRIZ $B_{m \times n}$ SE B PODE SER OBTIDA PELA APLICAÇÃO FINITA DE OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS DE A.

ENTÃO,

SE APLICARMOS AS OPERAÇÕES INVERSAIS QUE FORAM REALIZADAS NA MATRIZ A PARA OBTEN B OBTENEMOS A LOGO A MATRIZ $A_{m \times n}$ É EQUIVALENTE POR LINHAS A $B_{m \times n}$ POIS FOI OBTIDA PELA APLICAÇÃO FINITA DE OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS DE $B_{m \times n}$.

T.2.C DEFINIÇÃO 2, UMA MATRIZ $A_{m \times n}$ É EQUIVALENTE POR LINHAS A UMA MATRIZ $B_{m \times n}$ SE B PODE SER OBTIDA PELA APLICAÇÃO FINITA DE OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS DE A.

ENTÃO,

SE A MATRIZ A É EQUIVALENTE POR LINHAS A B SIGNIFICA QUE B FOI OBTIDA DE A POR MEIO DE OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS DE A. E SE B É EQUIVALENTE POR LINHAS A C IMPLICA QUE C FOI OBTIDA DE B POR MEIO DE OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS DE B.

LOGO,

QUANDO B FOI OBTIDA TODAS AS OPERAÇÕES POSSÍVEIS SOBRE A NÃO HAVIA SIDO APLICADAS, POR ISSO, FOI POSSÍVEL OBTEN C DE B. O QUE IMPLICA QUE A É EQUIVALENTE POR LINHAS A C.

EXERCÍCIO T.5 (PÁGINA 43)

SUPONHA QUE A É EQUIVALENTE POR LINHAS A I_2 , OU SEJA, I_2 FOI OBTIDA DE A ATRAVÉS DE OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE AS LINHAS DE A .

ENTÃO,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} x \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & -bc/a + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix}$$

LOGO,

$$ad - bc \neq 0$$

POIS, CASO CONTRÁRIO, A FRAÇÃO $\frac{ad-bc}{a}$ SERIA IGUAL A ZERO E NÃO RESULTARIA NA I_2 .

EXERCÍCIO T.6 (PÁGINA 43)

UM SISTEMA HOMOGÊNEO POSSUI SOLUÇÃO TRIVIAL SE $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. LOGO, PARA QUE O SISTEMA DADO TENHA SOMENTE A SOLUÇÃO TRIVIAL É NECESSÁRIO QUE $x_1 = x_2 = 0$.

LOGO,

AO ESCALONAMOS A MATRIZ A DADA ESSA DEVERÁ SER EQUIVALENTE POR LINHAS A I_2 .

808

207

1 / 1

SEDO ASSIM,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{bmatrix} x \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & -bc/a + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix}$$

LOGO,

$$ad-bc \neq 0$$

POIS CASO CONTRÁRIO, A FRACÇÃO $\frac{ad-bc}{a}$ SERIA IGUAL A ZERO E NÃO RESULTARIA NA I_2 .

EXERCÍCIO T.7 (PÁGINA 43)

NA DEFINIÇÃO DE MATRIZ ESCALONADA POR LINHAS TEMOS QUE O COEFICIENTE LÍDER DE CADA LINHA DEVE ESTAR A ESQUERDA DO COEFICIENTE LÍDER DA LINHA SUBSEQUENTE (OU SEJA, O COEFICIENTE LÍDER DA i -ÉSIMA LINHA DEVE ESTAR A ESQUERDA DO COEFICIENTE LÍDER DA i -ÉSIMA LINHA + 1). E A COLUNA PIVÔ É A PRIMEIRA COLUNA CONTADA DA ESQUERDA PARA DREITA CUJOS COEFICIENTES NÃO SÃO TODOS NULOS ENTÃO,

$A_{m \times m}$ SOB FORMA DE MATRIZ ESCALONADA POR LINHAS RESULTARÁ EM UMA I_m SE ISSO NÃO OCORRER É PORQUE A POSSUI UMA LINHA DE ZEROS

EXERCÍCIO T.8 (PÁGINA 43)

PARA QUE O SISTEMA HOMOGÊNEO TENHA SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL

É NECESSÁRIO QUE $x \neq 0$ E $y \neq 0$.

RESOLVENDO O SISTEMA:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} x \left(\frac{1}{a-\lambda} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a-\lambda} \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} x (-c) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a-\lambda} \\ 0 & -\frac{cb}{a-\lambda} + d-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a-\lambda} \\ 0 & \frac{(a-\lambda)(d-\lambda) - cb}{a-\lambda} \end{bmatrix}$$

DESENVOLVENDO $-\frac{cb}{a-\lambda} + d-\lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{-cb}{a-\lambda} + d-\lambda &= \frac{-cb + d(a-\lambda) - \lambda(a-\lambda)}{a-\lambda} \\ &= \frac{-cb + (a-\lambda)(d-\lambda)}{a-\lambda} \\ &= \frac{(a-\lambda)(d-\lambda) - cb}{a-\lambda} \end{aligned}$$

MAS,

PARA OBTEN UMA SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL UMA INCÓGNITA DEVE FICAR EM FUNÇÃO DA OUTRA. LOGO,

$$\frac{(a-\lambda)(d-\lambda) - cb}{a-\lambda} = 0$$

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0(a-\lambda)$$

$$= 0$$

EXERCÍCIO T.9 (PÁGINA 43)

T.9.A COMO X_1 É SOLUÇÃO DE $AX=B$, TEMOS QUE $AX_1=B$
E COMO Y_1 É SOLUÇÃO DE $AX=0$, TEMOS QUE $AY_1=0$

VAMOS MOSTRAR QUE X_1+Y_1 É SOLUÇÃO DE $AX=B$

$$\begin{aligned} AX &= A(X_1+Y_1) \\ &= AX_1+AY_1 \\ &= B+0 \\ &= B \end{aligned}$$

T.9.B VAMOS MOSTRAR QUE $X=X_1+Y_1$, EM QUE X_1 É SOLUÇÃO PARTICULAR DE $AX=B$ E Y_1 É UMA SOLUÇÃO DO SISTEMA HOMOGÊNEO $AX=0$

$$\text{FAÇA } X = X_1 + \underbrace{(X-X_1)}_{Y_1}$$

$$X = X_1 + Y_1$$

$$X - X_1 = Y_1$$

$$Y_1 = X - X_1$$

$$\begin{aligned} AX &= A[X_1 + (X-X_1)] \\ &= A(X_1+Y_1) \\ &= AX_1+AY_1 \\ &= B+0 \\ &= B \end{aligned}$$

EXERCÍCIO T.1 (PÁGINA 33) (EP 45349) PT 011013x3

SE B FOR NÃO-SINGULAR, ENTÃO EXISTE $A B^{-1}$ LOGO,

$$B B^{-1} = B^{-1} B = I_m$$

SENDO ASSIM,

$B \neq 0$ (OU SEJA, NÃO É UMA MATRIZ NULA)

MAS,

PARA QUE O PRODUTO AB SEJA NULO É NECESSÁRIO QUE UMA MATRIZ OU AMBAS MATRIZES SEJAM NULAS. ENTÃO, COMO $B \neq 0$, ENTÃO,

$A = 0$ (OU SEJA, A É UMA MATRIZ NULA)

EXERCÍCIO T.2 (PÁGINA 33)

SE A É SINGULAR, ENTÃO, A^{-1} NÃO EXISTE. ENTÃO,

$$A^{-1} A X = A^{-1} 0$$

$$I_m X = 0$$

$$X = 0$$

O QUE RESULTARIA EM UMA SOLUÇÃO ÚNICA, NÃO É POSSÍVEL. LOGO, QUANDO A FOR SINGULAR $A X = 0$ POSSUÍM INFINITAS SOLUÇÕES, OU SEJA, SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL.

EXERCÍCIO T.7 (PÁGINA 55)

SUPONHA QUE A SEJA NÃO-SINGULAR. LOGO, A^{-1} EXISTE.

ENTÃO,

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$I_n X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

ASSIM, SE A FOR NÃO-SINGULAR, TEMOS UMA SOLUÇÃO ÚNICA.

ENTRETANTO,

A É SINGULAR, ENTÃO, A^{-1} NÃO EXISTE E COMO $B \neq 0$ (OU SEJA, MESMO QUE A FORNA REDUZIDA ESCALONADA POR LINHAS RESULTAN EM UMA I_m) NÃO SERÁ POSSÍVEL OBTEN SOLUÇÃO ÚNICA.

SENDO ASSIM,

O SISTEMA HOMOGÊNEO $AX=B$ POSSUIRÁ SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL, OU SEJA, INFINITAS SOLUÇÕES.