

EXERCÍCIO 7.1 (PÁGINA 148)

SEJA $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ UM CONJUNTO DE m VETORES.

SUPONHA QUE A E B SÃO EQUIVALENTES POR LINHA.
ASSIM, CADA LINHA DE B É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DAS DE A
E CADA LINHA DE A É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DAS DE B .

LOGO,

O ESPAÇO-LINHA DE B ESTÁ CONTIDO EM A E O ESPAÇO-LINHA

DE A ESTÁ CONTIDO EM B. ASSIM, OS ESPAÇOS-LINHA DE A E B SÃO IGUAIS.

LOGO,

$$B = [A] \text{ E } A = [B]$$

SABE-SE QUE NUMA MATRIZ QUALQUER SOB A FORMA ESCALONADA REDUZIDA POR LINHAS, AS LINHAS-NULAS SÃO COMBINAÇÕES LINEARES DAS DEMAIS m LINHAS.

ENTÃO,

AS m LINHAS NÃO-NULAS SÃO L.I. (LINEARMENTE INDEPENDENTES).

COMO,

$A = [B]$, OS VETORES DE B SÃO L.I. (LINEARMENTE INDEPENDENTES) E OS ESPAÇOS-LINHA DE A E B SÃO IGUAIS.

ENTÃO,

B É BASE PARA SEU ESPAÇO-LINHA.

EXERCÍCIO T.4 (PÁGINA 148)

SUPONHA $AX = 0$

ENTÃO,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ENTÃO,

SE A i -ÉSIMA LINHA FOR L.D. (LINEARMENTE DEPENDENTE), OU SEJA, UMA COMBINAÇÃO LINEAR DAS DEMAIS LINHAS O SISTEMA $AX=0$ TERÁ SOLUÇÃO NÃO-TRIVIAL.

EXERCÍCIO 1.3 (PÁGINA 198)

SEJA

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

SUPONHA QUE O POSTO $A = m$.

LOGO,

A É EQUIVALENTE POR LINHAS A I_m . OU SEJA, A É NÃO-SINGULAR.

SENDO ASSIM,

AS LINHAS DE A SÃO L.I. (LINEARMENTE INDEPENDENTES).

COMO,

PELO TEOREMA O POSTO-LINHA E O POSTO-COLUMA DE UMA MATRIZ $m \times m$ $A = [a_{ij}]$ SÃO IGUAIS.

ENTÃO,

AS COLUMAS DE A TAMBÉM SÃO L.I (LINEARMENTE INDEPENDENTES).

EXERCÍCIO T.6 (PÁGINA 148)

SEJA $A = [a_{ij}]$ UMA MATRIZ $m \times m$.

SUPONHA QUE AS LINHAS DE A SEJAM L.I. (LINEARMENTE INDEPENDENTES).

SENDO ASSIM,

A É NÃO-SINGULAR, OU SEJA, A É EQUIVALENTE POR LINHAS A I_m .

COMO,

AS LINHAS DE A ESTÃO CONTIDAS EM I_m E AS LINHAS DE I_m ESTÃO CONTIDAS EM A , SEUS ESPAÇOS-LINHA SÃO IGUAIS.

Logo,

$$A = [I_n] \text{ e } I_n = [A]$$

sendo assim,

as colunas de A também geram $\mathbb{R}^n$

EXERCÍCIO T.7 (PÁGINA 158)

1º PASSO:

O produto interno dos vetores dois a dois, da base natural de $\mathbb{R}^n$ sempre será igual a zero.

Logo,

o conjunto dos vetores da base natural de $\mathbb{R}^n$ são ortogonais.

2º PASSO

A norma dos vetores da base natural de $\mathbb{R}^n$ é sempre unitária.

sendo assim,

o conjunto dos vetores da base natural de $\mathbb{R}^n$ são ortonormais.

EXERCÍCIO T.3 (PÁGINA 158)

SEJAM W UM SUBESPAÇO NÃO-NULO DE $\mathbb{R}^m$ E $T = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ UMA BASE ORTONORMAL DE W .

LOGO,

$$W = [T]$$

COMO,

W É UM SUBESPAÇO NÃO-NULO DE $\mathbb{R}^m$ IMPLICA QUE T TAMBÉM GERA O $\mathbb{R}^m$.

EXERCÍCIO T.5 (PÁGINA 158)

$$\langle X, Y_j \rangle = 0, \forall j = 1, \dots, m$$

$$\text{SEJA } Y \in [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$$

$$\Rightarrow Y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_m Y_m, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, m$$

ENTÃO

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle X, a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_m Y_m \rangle \\ &= a_1 \langle X, Y_1 \rangle + a_2 \langle X, Y_2 \rangle + \dots + a_m \langle X, Y_m \rangle \\ &= a_1(0) + a_2(0) + \dots + a_m(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \perp Y$$

EXERCÍCIO T.6 (PÁGINA 758)