

LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

1

QUESTÃO 07:

Q.1) * SABE-SE QUE $y = \frac{Y}{AL}$. LOGO,

$$\frac{Y}{AL} = \left(\frac{K}{AL} \right)^{\alpha} \left(\frac{AL}{AL} \right)^{1-\alpha}$$

$$\boxed{y = k^{\alpha}} \quad (1)$$

* CONSIDERANDO QUE A TAXA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL SEJA IGUAL A m E A TAXA DE CRESCIMENTO DO CONHECIMENTO g :

$$\boxed{\frac{\dot{L}}{L} = m} \quad (2)$$

$$\boxed{\frac{\dot{A}}{A} = g} \quad (3)$$

* ALÉM DISSO CONSIDERANDO QUE O CAPITAL DEPRECIA-SE A UMA TAXA $\delta \geq 0$, A DINÂMICA DESSA VARIÁVEL PODE SER ESCRITA COMO:

$$\boxed{\dot{K} = sY - \delta K} \quad (4)$$

* COMO $k = \frac{K}{AL}$, A DERIVADA DESSA EXPRESSÃO EM RELAÇÃO

A t É DADA POR:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}AL - K(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2}$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}AL}{(AL)^2} - \frac{K\dot{A}L}{(AL)^2} - \frac{KA\dot{L}}{(AL)^2}$$

$$\dot{Q} = \frac{\dot{K}}{AL} = \frac{K \dot{L}}{AL^2} - \frac{K \dot{A}}{A^2 L}$$

$$= \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K \cdot \dot{L}}{AL L} - \frac{K \cdot \dot{A}}{AL A}$$

* DE (2), (3) E (4) TEM-SE QUE

$$\dot{Q} = \frac{\alpha Y - \delta K}{AL} - \dot{Q} m - \delta g$$

$$\dot{Q} = \alpha Y - \delta K - \dot{Q} m - \delta g$$

$$= \alpha f(K) - (m + g + \delta) K \quad (5)$$

* NO SS $\dot{Q} = 0$ E $K = K^*$ LOGO,

$$\alpha f(K) = (m + g + \delta) K$$

$$\alpha K^g = (m + g + \delta) K$$

$$\frac{K^g}{K} = \frac{m + g + \delta}{\alpha}$$

$$K^{g-1} = \frac{m + g + \delta}{\alpha}$$

$$K^* = \left(\frac{m + g + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{g-1}}$$

$$K^* = \left(\frac{\alpha}{m + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-g}} \quad (6)$$

* SUBSTITUINDO (6) EM $Y = K^g$ TEM-SE QUE

$$Y^* = \left[\left(\frac{\alpha}{m + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-g}} \right]^g$$

$$= \left(\frac{\alpha}{m + g + \delta} \right)^{\frac{g}{1-g}} \quad (7)$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

(2)

* SUBSTITUINDO (7) EM $\mathcal{L} = (1-\alpha) f(k)$ OBTÉM-SE:

$$\mathcal{L}^* = (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{n+g+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (8)$$

7.ii) * SABE-SE QUE

$$\dot{\mathcal{L}} = f(k) - \alpha f(k) \quad \dot{k} = \alpha f(k) - (n+g+\delta)k \quad \gamma = k^\alpha$$

* POIS $\dot{k} = 0$. LOGO,

$$\alpha f(k) = (n+g+\delta)k$$

PORTANTO,

$$\mathcal{L} = f(k) - (n+g+\delta)k$$

$$\mathcal{L} = k^\alpha - (n+g+\delta)k \quad (9)$$

* MAXIMIZANDO O CONSUMO EM RELAÇÃO À k

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 0$$

$$\alpha k^{\alpha-1} - (n+g+\delta) = 0$$

$$k^{\alpha-1} = \frac{n+g+\delta}{\alpha}$$

$$k_{GN} = \left(\frac{n+g+\delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{n+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2)$$

* SUBSTITUINDO (2) EM $y = R^q$ TEM-SE

(2.4)

$$V_{GN} = \left[\left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}} \right]^q$$

$$= \left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{q}{1-q}} \quad (3)$$

* SUBSTITUINDO (2) EM (1)

$$L_{GN} = \left[\left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}} \right]^q - (m+g+\delta) \left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$= \left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{q}{1-q}} - (m+g+\delta) \left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (4)$$

(1.iii) $R^* = R_{GN}$

$$\left(\frac{R}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}} = \left(\frac{q}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$\frac{R}{m+g+\delta} = \frac{q}{m+g+\delta}$$

$$R = q$$

OU SEJA, PARA ALCANÇAR-SE O VALOR DE R DA REGRA DE OUNO É NECESSÁRIO QUE A TAXA DE DOAÇÃO SEJA IGUAL À PARTICIPAÇÃO DO CAPITAL NO PRODUTO.

(1.124) $R^* = \left(\frac{R}{m+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-q}}$

$$= \left(\frac{0,23}{0,015 + 0,025 + 0,03} \right)^{\frac{1}{1-0,35}}$$

$$R^* = \left(\frac{0,23}{0,09} \right)^{\frac{1}{0,65}}$$

$$= 4,8752$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MACROECONOMIA I

(3)

$$y^* = \left(\frac{2}{n+g+d} \right)^{\frac{g}{1-g}}$$

$$= \left(\frac{0,25}{0,015 + 0,025 + 0,05} \right)^{\frac{0,35}{1-0,35}}$$

$$= \left(\frac{0,25}{0,09} \right)^{\frac{0,35}{0,65}}$$

$$y^* = 1,7335$$

$$c^* = (1-g) \left(\frac{2}{n+g+d} \right)^{\frac{g}{1-g}}$$

$$= (1-0,35) \left(\frac{0,25}{0,015 + 0,025 + 0,05} \right)^{\frac{0,35}{1-0,35}}$$

$$= 0,65 \left(\frac{0,25}{0,09} \right)^{\frac{0,35}{0,65}}$$

$$= 1,1267$$

$$h_{GN} = \left(\frac{g}{n+g+d} \right)^{\frac{1}{1-g}}$$

$$= \left(\frac{0,35}{0,015 + 0,025 + 0,05} \right)^{\frac{1}{1-0,35}}$$

$$= \left(\frac{0,35}{0,09} \right)^{\frac{1}{0,65}}$$

$$h_{GN} = 8,0802$$

$$v_{GN} = \left(\frac{g}{n+g+d} \right)^{\frac{g}{1-g}}$$

$$= \left(\frac{0,35}{0,015 + 0,025 + 0,05} \right)^{\frac{0,35}{1-0,35}}$$

$$v_{GN} = \left(\frac{0,35}{0,09} \right)^{\frac{0,35}{0,65}}$$

$$= 2,0778$$

$$C_{GN} = \left(\frac{\alpha}{m+g+d} \right)^{\frac{g}{1-g}} - (m+g+d) \left(\frac{\alpha}{m+g+d} \right)^{\frac{1}{1-g}}$$

(13.19)

$$= \left(\frac{0,35}{0,015+0,025+0,05} \right)^{\frac{0,35}{1-0,35}} - (0,015+0,025+0,05) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{0,35}{0,015+0,025+0,05} \right)^{\frac{1}{1-0,35}}$$

$$= \left(\frac{0,35}{0,09} \right)^{\frac{0,35}{0,65}} - (0,09) \left(\frac{0,35}{0,09} \right)^{\frac{1}{0,65}}$$

$$= 1,3506$$

$$\alpha = g$$

$$= 0,35$$

1.28 $\lambda = (1-g)(m+g+d)$

$$= (1-0,35)(0,015+0,025+0,05)$$

$$= 0,65(0,09)$$

$$= 0,0585$$

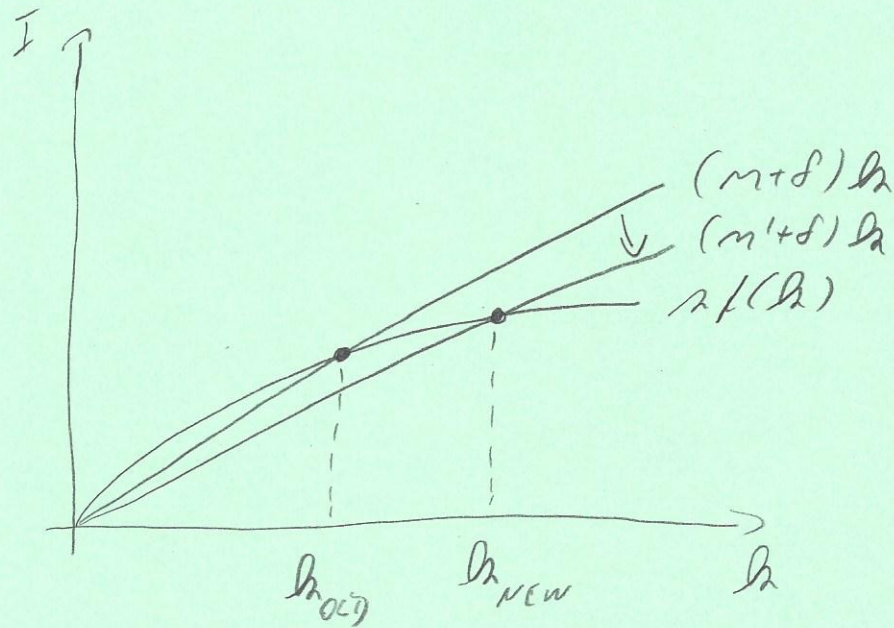
OU SEJA, POR APO λ E g MOVER-SE APROXIMADAMENTE 6% DA DISTÂNCIA QUE FALTA PARA ALCANÇAR OS VALORES DE ESTADO ESTACIONÁRIO λ^* E g^* .

QUESTÃO 02:

2.1 * CAPITAL POR TRABALHADOR

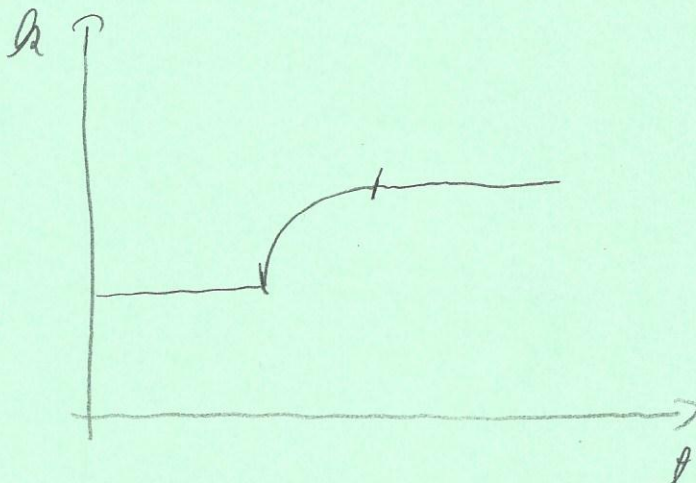
LISTA DE EXERCÍCIOS I MACROECONOMIA I

4



COM A QUEDA DA TAXA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL m A CURVA DE REPOSIÇÃO DE CAPITAL $(m+\delta)K$ DESLOCA-SE PARA BAIXO E, SENDO ASSIM, O INVESTIMENTO BRUTO $s f(K)$ NO CAPITAL INICIAL K_{OLD} SUPERA O INVESTIMENTO DE REPOSIÇÃO $(m+\delta)K$. DESSA FORMA, HÁ UM AUMENTO DO CAPITAL ATÉ O PONTO K_{NEW} EM QUE $s f(K) = (m'+\delta)K$, ISTO É, A DINÂMICA DO CAPITAL POR TRABALHADOR É IGUAL A ZERO.

GRAFICAMENTE,

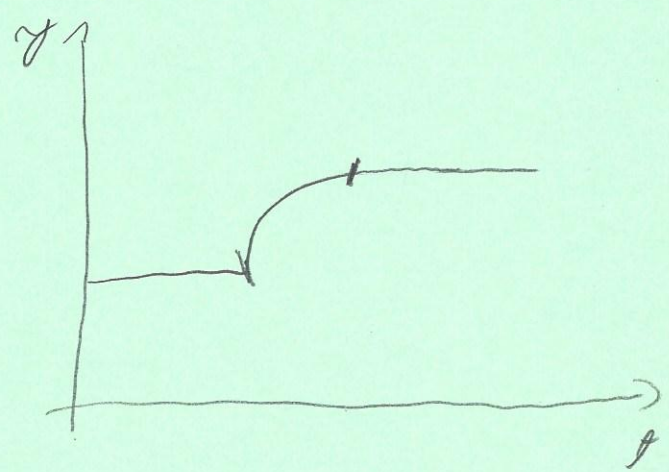


* PRODUTO POR TRABALHADOR

(4.A)

UMA VEZ QUE $y = f(k)$ ISSO IMPLICA QUE, COMO A QUANTIDADE DA TAXA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL AUMENTA O CAPITAL POR TRABALHADOR, ENTÃO, CONSEQUENTEMENTE, O PRODUTO POR TRABALHADOR TAMBÉM AUMENTARÁ.

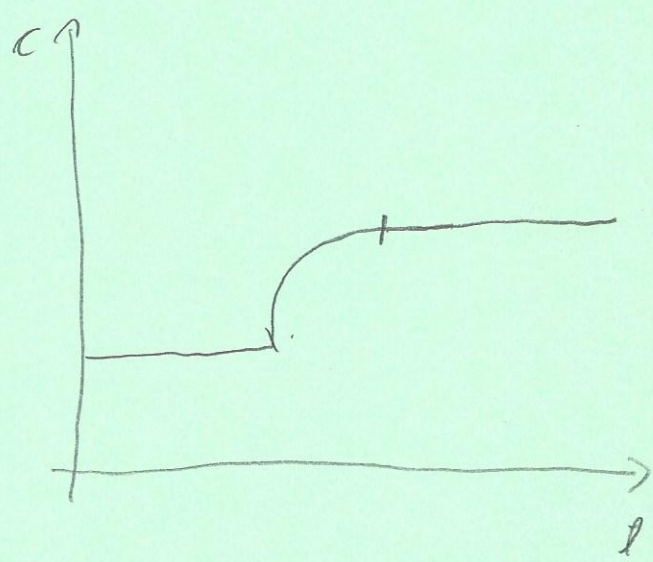
GRAFICAMENTE,



* CONSUMO POR TRABALHADOR

O CONSUMO POR TRABALHADOR TAMBÉM CRESCERÁ, POIS UMA VEZ QUE ESSA VARIÁVEL ECONÔMICA NO MODELO DE SOLOW É DADA POR $c = f(k) - \delta f(k)$, ENTÃO UM AUMENTO DO PRODUTO POR TRABALHADOR AUMENTARÁ O CONSUMO POR TRABALHADOR.

GRAFICAMENTE,



LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

(5)

2.ii) * SADE-SE QUE $y = \frac{Y}{L}$. LOGO,

$$\boxed{Y = y \cdot L} \quad (1)$$

PORTANTO,

$$\ln Y = \ln(y \cdot L)$$

$$\boxed{\ln Y = \ln y + \ln L} \quad (2)$$

* DERIVANDO (2) EM RELAÇÃO AO TEMPO TEM-SE QUE

$$\frac{d \ln Y}{dt} = \frac{d \ln y}{dt} + \frac{d \ln L}{dt}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{L}}{L}$$

$$= \frac{\dot{y}}{y} + n$$

* NO SS $\frac{\dot{y}}{y} = 0$. LOGO,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = n \quad \therefore \boxed{\dot{Y} = nY}$$

OU SEJA, COM A QUEDA DA TAXA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL n O PRODUTO TOTAL CRESCERÁ A UMA TAXA MENOR

SE NÃO TIVESSE HAVIDO A QUEDA DA TAXA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL. (S.A)

QUESTÃO 03:

* ELASTICIDADE DO PRODUTO POR UNIDADE DE TRABALHO EFETIVO

$$E_p = \frac{\partial y^*}{\partial m} \cdot \frac{m}{y^*}$$

* SABE-SE QUE $y^* = f(h^*)$. ENTÃO,

$$\frac{\partial y^*}{\partial m} = f'(h^*) \cdot \frac{\partial h^*}{\partial m} \quad (1)$$

* NO SS TEM-SE QUE

$$\dot{h} = n f(h) - (m + g + \delta) h, \quad \dot{h} = 0 \quad \text{e} \quad h = h^*$$

PORTANTO,

$$n f(h^*) = (m + g + \delta) h^* \quad (2)$$

* DERIVANDO (2) EM RELAÇÃO À m OBTÉM-SE

$$n f'(h^*) \frac{\partial h^*}{\partial m} = (m + g + \delta) \frac{\partial h^*}{\partial m} + h^*$$

$$h^* = [n f'(h^*) - (m + g + \delta)] \frac{\partial h^*}{\partial m}$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial m} = \frac{h^*}{n f'(h^*) - (m + g + \delta)} \quad (3)$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

(6)

* SUBSTITUINDO (3) EM (1):

$$\frac{\partial y^*}{\partial m} = f'(h^*) \frac{h^*}{2f'(h^*) - (m + g + \delta)}$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial m} \cdot \frac{m}{y^*} = \left[f'(h^*) \frac{h^*}{2f'(h^*) - (m + g + \delta)} \right] \cdot \frac{m}{y^*}$$

$$\epsilon_p = \frac{m h^* f'(h^*)}{f(h^*) [2f'(h^*) - (m + g + \delta)]}$$

NO 55 $2 = \frac{(m + g + \delta) h^*}{f(h^*)}$. LOGO,

$$\epsilon_p = \frac{m h^* f'(h^*)}{[h^* f'(h^*) - f(h^*)] (m + g + \delta)} \quad (4)$$

* DIVIDINDO O NUMERADOR E O DENOMINADOR DE (4) POR $f(h^*)$ E FAZENDO $\frac{f'(h^*) h^*}{f(h^*)} = \alpha$ OBTÉM

$$\epsilon_p = \frac{\alpha m}{(\alpha - 1)(m + g + \delta)}$$

$$= \frac{m}{m + g + \delta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$= - \frac{m}{m + g + \delta} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (5)$$

* CALCULANDO A VARIAÇÃO DE y^*

(6.9)

$$m = \frac{0,02 + 0,01}{2}$$

$$= 0,015$$

PORTANTO,

$$E_p = - \frac{0,015}{0,015 + 0,02 + 0,03} \cdot \frac{1/3}{1 - 1/3}$$

$$= - \frac{0,015}{0,065} \cdot \frac{1/3}{2/3}$$

$$= - \frac{0,015}{0,065} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= - 0,1154$$

COMO A QUEDA EM m FOI DE 50% TEM-SE QUE

$$(-0,5)(-0,1154) = 0,0577$$

OU SEJA, UMA QUEDA DE 50% NA TAXA DE CRESCIMENTO POPULACIONAL AUMENTARÁ EM APROXIMADAMENTE 6% O PRODUTO POR UNIDADE DE TRABALHO EFETIVO.

QUESTÃO 04:

$$y = k^\alpha y^\beta \quad (1)$$

$$c + i + g = y \quad (2)$$

$$g = \tau y \quad (3)$$

$$c = (1 - \alpha)(1 - \tau)y \quad (4)$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

7

4.1 * SUBSTITUINDO (1) EM (3) E (4)

$$y = \tau h^\alpha y^\beta \quad (5)$$

$$c = (1-\alpha)(1-\tau) h^\alpha y^\beta \quad (6)$$

* SABE-SE QUE NO SS

$$\dot{h} = s f(h) - (n+\delta)h \quad \text{E} \quad i = s f(h)$$

PORTANTO,

$$\dot{h} = i - (n+\delta)h$$

$$i = \dot{h} + (n+\delta)h \quad (7)$$

* SUBSTITUINDO (1), (5), (6) E (7) EM (2)

$$(1-\alpha)(1-\tau) h^\alpha y^\beta + \dot{h} + (n+\delta)h + \tau h^\alpha y^\beta = h^\alpha y^\beta$$

$$\dot{h} = [1 - (1-\alpha)(1-\tau) - \tau] h^\alpha y^\beta - (n+\delta)h$$

$$= (\alpha - \alpha + \alpha + \alpha - \alpha\tau - \tau) h^\alpha y^\beta - (n+\delta)h$$

$$= \alpha(1-\tau) h^\alpha y^\beta - (n+\delta)h \quad (1)$$

EQUAÇÃO PARA A DINÂMICA DO CAPITAL PER CAPITA

* EXPRESSÃO DO CAPITAL PER CAPITA

SABE-SE DE (5) QUE $y = \tau h^\alpha y^\beta$. ENTÃO,

$$y^{1-\beta} = \tau h^\alpha$$

$$y = \tau^{\frac{1}{1-\beta}} h^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \quad (2)$$

* NO SS $\dot{h} = 0$. E $h = h^*$. LOGO, DE (1)

(7.A)

$$2(1-\epsilon)h^{\frac{\alpha}{1-\beta}}g^{\frac{\beta}{1-\beta}} = (n+\delta)h$$

$$2(1-\epsilon)h^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}h^{\frac{\alpha\beta}{1-\beta}} = (n+\delta)h$$

$$2(1-\epsilon)h^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} = (n+\delta)h$$

$$h^{a-1} = \frac{n+\delta}{2(1-\epsilon)\tau^b}$$

$$h^* = \left[\frac{2(1-\epsilon)\tau^b}{n+\delta} \right]^{\frac{1}{1-a}} \quad (3)$$

EM QUE:

$$a = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$$b = \frac{\beta}{1-\beta}$$

* EXPRESSÃO DO PRODUTO PER CAPITA

$$y = h^{\alpha}g^{\beta}$$

$$y = h^{\alpha}\tau^{\beta}y^{\beta}$$

$$y^{1-\beta} = h^{\alpha}\tau^{\beta}$$

$$y = h^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\tau^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

$$= h^a \tau^b \quad (4)$$

EM QUE:

$$a = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$$b = \frac{\beta}{1-\beta}$$

SUBSTITUINDO (3) EM (4)

$$y^* = \left[\frac{2(1-\epsilon)\tau^b}{n+\delta} \right]^{\frac{a}{1-a}} \tau^b$$

$$= \left[\frac{2(1-\epsilon)}{n+\delta} \right]^{\frac{a}{1-a}} \tau^b \tau^{\frac{ab}{1-a}}$$

$$y^* = \left[\frac{2(1-\epsilon)}{n+\delta} \right]^{\frac{a}{1-a}} \tau^{\frac{b}{1-a}}$$

(5)

EM QUE:

$$a = \frac{\alpha}{1-\beta} \text{ E } b = \frac{\beta}{1-\beta}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I MACROECONOMIA I

(8)

(4.ii) Haverá tanto um impacto negativo, $(1-\bar{c})^{\frac{1}{1-a}}$ no capital e $(1-\bar{c})^{\frac{a}{1-a}}$ no produto, quanto um impacto positivo, $\bar{c}^{\frac{b}{1-a}}$ no capital e no produto. O impacto positivo é induzido pelo aumento dos gastos governamentais que estimulam a economia aumentando o estoque de capital dessa. Por sua vez, o impacto negativo é induzido pela maior taxa de imposto do governo, reduzindo a renda disponível das famílias

* Calculando $\bar{c}$ que maximiza h

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{c}} = 0$$

$$\frac{1}{1-a} \left[\frac{a(1-\bar{c})\bar{c}^b}{n+\delta} \right]^{\frac{a}{1-a}} \left(\frac{b\bar{c}^{b-1} - (1+b)a\bar{c}^b}{n+\delta} \right) = 0$$

$$b\bar{c}^{b-1} = (1+b)a\bar{c}^b$$

$$\bar{c}^{-1} = \frac{1+b}{b}$$

$$\boxed{\bar{c} = \frac{b}{1+b}}$$

como $b = \frac{\beta}{1-\beta}$. Então,

$$b(1-\beta) = \beta \rightarrow b = \beta + b\beta$$

$$b - b\beta = \beta \rightarrow b = (1+b)\beta$$

$$\boxed{\beta = \frac{b}{1+b}}$$

portanto,

J.A

$$\tau = \beta$$

OU SEJA, O VALOR DE τ QUE MAXIMIZA R NO SS É IGUAL
A PARTICIPAÇÃO DOS GASTOS GOVERNAMENTAIS COM INFRAES-
TRUTURA E OUTROS SERVIÇOS PRODUTIVOS.

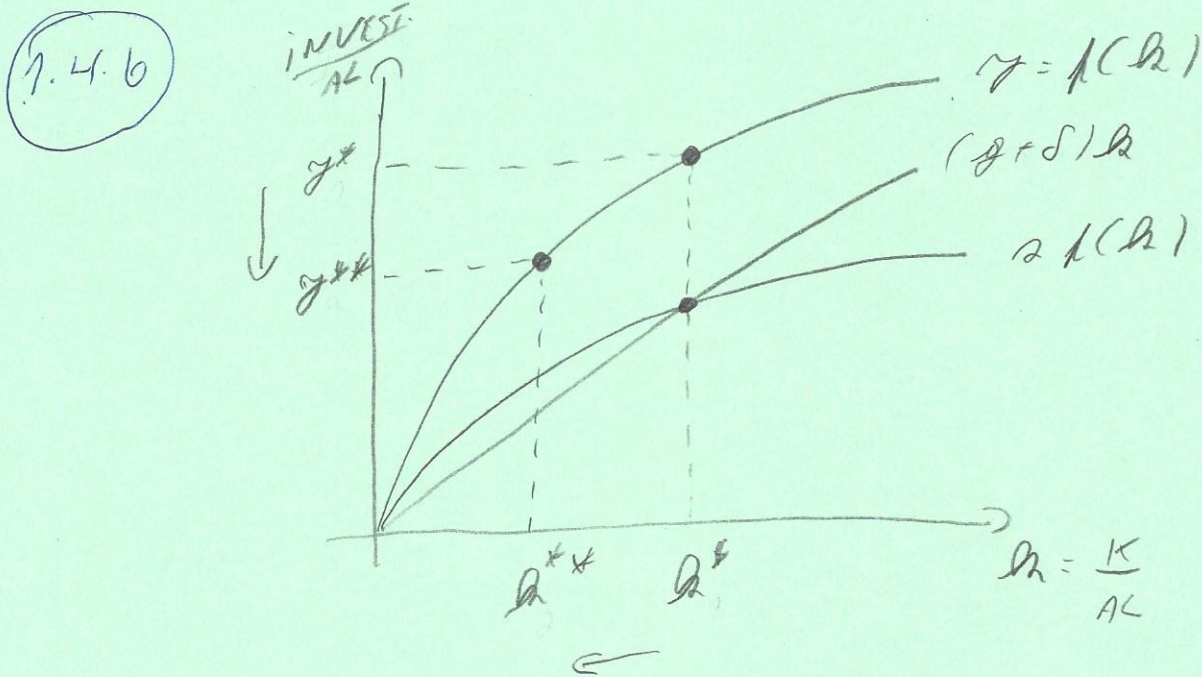
LISTA DE EXERCÍCIOS I MACROECONOMIA I

(9)

~> PAGE 45

QUESTÃO 05 (PROBLEMA 1.4 DO NOTEN)

1.4.a) Como $R = \frac{K}{AL}$; uma vez que há um aumento de L (número de trabalhadores), mas o capital (K) e a tecnologia (A) permanecem constante, haverá uma queda do capital por unidade de trabalho efetivo. Consequentemente, uma vez que $y = f(R)$ o produto por unidade de trabalho efetivo também diminuirá.



Com o novo capital por unidade de trabalho efetivo o investimento baixo $2f(R^{**})$ supera o investimento de reposição de capital $(\delta + s)R^{**}$. Ou seja, o nível de poupança e investimento dessa economia são superiores à depreciação e ao progresso tecnológico no nível R^{**} . Dessa forma, o capital por unidade de trabalho efetivo crescerá retornando ao nível inicial R^* , implicando que o produto por unidade de

TRABALHO EFETIVO TAMBÉM RETORNA AO NÍVEL INICIAL y^* . LOGO, A ECONOMIA RETORNA À TRAJECTÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO.

1.4.c) UMA VEZ QUE NA TRAJECTÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO O INVESTIMENTO POR UNIDADE DE TRABALHO EFETIVO $2f(k^*)$ É IGUAL AO INVESTIMENTO DE DEPOSIÇÃO $(\delta + s)k$, IMPLICANDO $\dot{k} = 0$, TEM-SE ^{QUE} O PRODUTO POR UNIDADE DE TRABALHO EFETIVO RETORNA AO VALOR ORIGINAL y^* , OU SEJA, É O MESMO ANTES DOS NOVOS TRABALHADORES ATANESCEM.

→ PAGE 46

QUESTÃO 03: (PROBLEMA 1.9 DO NOTEN)

1.9.a) * SABE-SE QUE

$$y = ALf(k) \quad \text{e} \quad k = \frac{K}{AL}$$

PORTANTO,

$$\begin{aligned} W &= \frac{\partial F(K, AL)}{\partial L} \\ &= Kf'(k) \left(-\frac{K}{AL^2} \right) + Af'(k) \\ &= f'(k) \left(-\frac{K}{L} \right) + Af'(k) \\ &= A \left[f'(k) \left(-\frac{K}{AL} \right) + f'(k) \right] \\ &= A [f(k) - k f'(k)] \quad (1) \end{aligned}$$

7.9.6 * SABE-SE QUE

$$w = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial L} \quad r = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} - \delta \quad E \quad Y = AL f(\bar{a})$$

$$= AL f\left(\frac{K}{AL}\right)$$

PORTANTO,

$$r = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} - \delta$$

$$= \cancel{AL} f'(\bar{a}) \cdot \frac{1}{\cancel{AL}} - \delta$$

POIS $\bar{a} = \frac{K}{AL}$

$$\boxed{r = f'(\bar{a}) - \delta} \quad (2)$$

* DE (2) E (3) TEM-SE

$$wL + rK = \{AL[f(\bar{a}) - \bar{a}f'(\bar{a})]\}L + [f'(\bar{a}) - \delta]K$$

$$= ALf(\bar{a}) - AL\bar{a}f'(\bar{a}) + Kf'(\bar{a}) - \delta K$$

* COMO $\bar{a} = \frac{K}{AL}$ OBTÉM-SE

$$wL + rK = ALf(\bar{a}) - \cancel{AL} \frac{K}{\cancel{AL}} f'(\bar{a}) + Kf'(\bar{a}) - \delta K$$

$$= ALf(\bar{a}) - Kf'(\bar{a}) + Kf'(\bar{a}) - \delta K$$

$$= ALf(\bar{a}) - \delta K$$

$$\boxed{= F(K, AL) - \delta K} \quad (3) \quad \blacksquare$$

169.C * TAXA DE CRESCIMENTO DE n
 DE (2) NOTA-SE QUE O PRODUTO MARGINAL DO CAPITAL
 É $\pi = f'(k) - \delta$. SABE-SE QUE δ É CONSTANTE E QUE k É
 CONSTANTE NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO, LOGO
 $f'(k)$ E π TAMBÉM SERÃO CONSTANTE. DESSA FORMA, NA TRA-
 JETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO TEM-SE QUE $\dot{\pi}/\pi = 0$
 PORTANTO, O MODELO DE SOLOW EXIBE A PROPRIEDADE DE QUE
 O RETORNO DO CAPITAL É CONSTANTE AO LONGO DO TEMPO.

* TAXAS DE CRESCIMENTO DE w

DE (2) TEM-SE QUE

$$w = A [f(k) - k f'(k)]$$

PORTANTO,

$$\ln w = \ln \{A [f(k) - k f'(k)]\}$$

$$= \ln A + \ln [f(k) - k f'(k)]$$

LOGO,

$$\frac{d \ln w}{dt} = \frac{d \ln A}{dt} + \frac{d \ln [f(k) - k f'(k)]}{dt}$$

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{f'(k) \dot{k} - [k f''(k) \dot{k} + \dot{k} f'(k)]}{f(k) - k f'(k)}$$

$$= g + \frac{f'(k) \dot{k} - \dot{k} f'(k) - k f''(k) \dot{k}}{f(k) - k f'(k)}$$

$$= g - \frac{k f''(k) \dot{k}}{f(k) - k f'(k)}$$

* COMO NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO $\dot{h} = 0$ TEM-SE QUE

$$\boxed{\frac{\dot{w}}{w} = g} \quad (4)$$

ASSIM, A TAXA DE CRESCIMENTO DO PRODUTO MARGINAL DO TRABALHO, NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO, É IGUAL A TAXA DE CRESCIMENTO DO PROGRESSO TECNOLÓGICO.

1.9.1 * TAXA DE CRESCIMENTO DO PRODUTO MARGINAL DO TRABALHO

$$\frac{\dot{w}}{w} = g + \frac{-h I''(h) \dot{h}}{I(h) - h I'(h)}$$

COMO $I(h)$ É CÔNCAVA TEM-SE QUE $I''(h) < 0$ E $I(h) > h I'(h)$, E UMA VEZ QUE h E $\dot{h}$ SÃO POSITIVOS PERCEBE-SE QUE $\frac{\dot{w}}{w} > g$. DESSA FORMA, À MEDIDA QUE h CONVERGE PARA h^* O PRODUTO MARGINAL DO TRABALHO CRESCE MAIS RÁPIDO DO QUE CRESCERIA NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO, POIS NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO w CRESCE À TAXA g , TODAVIA, UMA VEZ QUE h ESTÁ CONVERGINDO PARA h^* , IMPLICA QUE h TAMBÉM ESTÁ CRESCENDO. LOGO, O TRABALHO TORNA-SE MAIS PRODUTIVO E A TAXA DE CRESCIMENTO DO PRODUTO MARGINAL DO TRABALHO É MAIOR EM RELAÇÃO À TAXA NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO.

* TAXA DE CRESCIMENTO DO PRODUTO MARGINAL DO CAPITAL

(11.9)

$$\pi = f'(k) - \delta$$

PORTANTO,

$$\boxed{\ln \pi = \ln f'(k) - \ln \delta} \quad (1)$$

* DERIVANDO (1) EM RELAÇÃO AO TEMPO

$$\frac{d \ln \pi}{dt} = \frac{d \ln f'(k)}{dt} - \frac{d \ln \delta}{dt}$$

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi} = \frac{f''(k) \dot{k}}{f'(k)} - \frac{\dot{\delta}}{\delta}$$

* COMO δ É CONSTANTE, ENTÃO $\frac{\dot{\delta}}{\delta} = 0$. LOGO,

$$\boxed{\frac{\dot{\pi}}{\pi} = \frac{f''(k) \dot{k}}{f'(k)}}$$

COMO $f(k)$ É CÔNCAVO TEM-SE QUE $f'(k) > 0$ E $f''(k) < 0$
 E UMA VEZ QUE $\dot{k} > 0$, ENTÃO $\frac{\dot{\pi}}{\pi} < 0$. LOGO, COMO k ESTÁ
 CONVERGINDO PARA k^* O PRODUTO MARGINAL DO CAPITAL DIMI-
 NUI-SE. COMO NA TRAJETÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO
 $\frac{\dot{\pi}}{\pi} = 0$, ENTÃO PODE-SE DIZER QUE QUANDO k CAMINHA EM DI-
 REÇÃO A k^* , π CRESCERÁ A UMA TAXA MENOR EM RELAÇÃO À TA-
 XA DE CRESCIMENTO DO PRODUTO MARGINAL DO CAPITAL NA TRAJETÓRIA DE CRE-
 SCIMENTO EQUILIBRADO.

PÁG 95

QUESTÃO 05 (PROBLEMA 2.14 DO LIVRO)

* MODELO DE DIAMOND

LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

12

$$U = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho} \frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}$$

LOGO,

$$\ln U_t = \ln \left(\frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} \right) + \ln \left(\frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} \right)$$

$$= \frac{1-\theta}{1-\theta} \ln C_{1t} + \frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{1-\theta}{1-\theta} \ln C_{2t+1}$$

$$= \ln C_{1t} + \ln \frac{C_{2t+1}}{1+\rho}$$

* RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA DAS FAMÍLIAS

$$C_{2t+1} = (1+r_{t+1})(A_t w_t - C_{1t})$$

$$\frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = A_t w_t - C_{1t}$$

$$A_t w_t = \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} + C_{1t}$$

* MONTANDO A LAGRANGIANA

$$d = \ln C_{1t} + \ln \frac{C_{2t+1}}{1+\rho} + \lambda \left(A_t w_t - C_{1t} - \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} \right)$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA DE ORDEM

$$\frac{\partial d}{\partial C_{1t}} = 0 \therefore \frac{1}{C_{1t}} - \lambda = 0 \therefore \lambda = \frac{1}{C_{1t}}$$

(7)

72.9

$$\frac{\partial d}{\partial C_{2t+1}} = 0 \therefore \frac{1}{1+r} - \frac{1}{C_{2t+1}} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0 \therefore \lambda = \frac{1+r_{t+1}}{(1+r)(C_{2t+1})} \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = 0 \therefore A_t W_t = C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} \quad (3)$$

IGUALANDO (1) E (2)

$$\frac{1}{C_{1t}} = \frac{1+r_{t+1}}{(1+r)(C_{2t+1})}$$

$$\boxed{C_{2t+1} = \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+r} \right) C_{1t}} \quad (4)$$

SUBSTITUINDO (4) EM (3) TEM-SE QUE

$$A_t W_t = C_{1t} + \frac{\left(\frac{1+r_{t+1}}{1+r} \right) C_{1t}}{1+r_{t+1}}$$

$$= C_{1t} + \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+r} \right) C_{1t} \left(\frac{1}{1+r_{t+1}} \right)$$

$$= C_{1t} + \frac{C_{1t}}{1+r}$$

$$= C_{1t} \left(1 + \frac{1}{1+r} \right)$$

$$= C_{1t} \left(\frac{2+r}{1+r} \right)$$

$$\boxed{C_{1t} = \left(\frac{1+r}{2+r} \right) A_t W_t} \quad (5)$$

SUBSTITUINDO (5) EM (4)

LISTA DE EXERCÍCIOS I
MACROECONOMIA I

13

$$C_{t+1} = \left(\frac{1+n_{t+1}}{1+r} \right) \left(\frac{1+r}{2+r} \right) A_t W_t$$
$$= \left(\frac{1+n_{t+1}}{2+r} \right) A_t W_t \quad (6)$$

ASSUMINDO $\theta=1$, A POUPEMÇA É DADA POR:

$$s = \frac{1}{2+r}$$

COMO O ESTOQUE DE CAPITAL É DADO POR:

$$K_{t+1} = s L_t A_t W_t$$

ENTÃO, O CAPITAL POR TRABALHO EFETIVO SERÁ

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} = \frac{s L_t A_t W_t}{A_{t+1} L_{t+1}}$$

SABE-SE QUE $A_{t+1} = (1+g)A_t$ E $L_{t+1} = (1+m)L_t$. ENTÃO,

$$\frac{A_t}{A_{t+1}} = \frac{1}{1+g} \quad \text{E} \quad \frac{L_t}{L_{t+1}} = \frac{1}{1+m}$$

PORTANTO,

$$k_{t+1} = s W_t \frac{1}{1+g} \cdot \frac{1}{1+m}$$

$$= \frac{s W_t}{(1+g)(1+m)}$$

COMO $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$ E $s = \frac{1}{2+r}$. LOGO,

$$h_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+m)} \cdot \frac{1}{2+p} [f(h_t) - h_t f'(h_t)]$$

13.9

CONO PARA UNA FUNCIÓN DO TIPO COBB-DOUGLAS $y = h^\alpha$ TEN-SE
QUE $f(h_t) = h_t^\alpha$. ENTÃO,

$$f'(h_t) = \alpha h_t^{\alpha-1}$$

PORTANTO,

$$w = [f(h_t) - h_t f'(h_t)]$$

$$= h_t^\alpha - h_t \alpha h_t^{\alpha-1}$$

$$= h_t^\alpha - \alpha h_t^\alpha$$

$$= (1-\alpha) h_t^\alpha$$

ENTÃO,

$$h_{t+1} = \frac{1}{(1+g)(1+m)} \cdot \frac{1}{2+p} (1-\alpha) h_t^\alpha$$

QUESTÃO 06:

6.i) $\phi = \frac{-\mu'(c)}{\mu''(c)}$

$$\begin{aligned}\mu'(c) &= \frac{\partial \mu}{\partial c} \\ &= \frac{(1-\theta)(c-\bar{c})^{-\theta}}{1-\theta} \\ &= (c-\bar{c})^{-\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu''(c) &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial c^2} \\ &= -\theta(c-\bar{c})^{-\theta-1}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi = \frac{-\cancel{(c-\bar{c})^{-\theta}}}{-\theta \cancel{c(c-\bar{c})^{-\theta}} (c-\bar{c})^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\theta} \left(\frac{c-\bar{c}}{c} \right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\bar{c}}{c} \right)}$$

6.ii) * PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

$$\max U = \int_0^{\infty} \frac{(c-\bar{c})^{1-\theta-1}}{1-\theta} e^{-(c-m)t} dt$$

S. A $\ddot{a} = w + \eta a - \kappa - m a$

14.A

$a(0) = a_0$

$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) e^{-\int_0^t (\eta(r) - m) dr} \geq 0$

* MONITANDO A HAMILTONIANA

$H = \frac{(c - \bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta} e^{-(\rho-m)t} + V(w + \eta a - \kappa - m a)$

* CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \therefore \frac{(1-\theta)(c-\bar{c})^{-\theta}}{1-\theta} e^{-(\rho-m)t} - V = 0$

$V = (c - \bar{c})^{-\theta} e^{-(\rho-m)t} \quad (1)$

$\frac{\partial H}{\partial a} = -\dot{V} \therefore V(\eta - m) = -\dot{V} \therefore \dot{V} = -V(\eta - m) \quad (2)$

$\frac{\partial H}{\partial v} = \dot{a} \therefore \ddot{a} = w + \eta a - \kappa - m a \quad (3)$

$\lim_{t \rightarrow \infty} [V(t) a(t)] = 0 \quad (4)$

* DERIVANDO (1) EM RELAÇÃO A

$\dot{V} = (c - \bar{c})^{-\theta} [-(\rho - m) e^{-(\rho-m)t}] + [-\theta (c - \bar{c})^{-\theta-1} \dot{c} e^{-(\rho-m)t}]$
 $= (c - \bar{c})^{-\theta} e^{-(\rho-m)t} [m - \rho - \theta (c - \bar{c})^{-1} \dot{c}] \quad (5)$

* SUBSTITUINDO (1) E (2) EM (5)

$$-(n-m)(c-\bar{c})^{-\theta} e^{-(\rho-m)t} = (c-\bar{c})^{-\theta} e^{-(\rho-m)t} [m-\rho-\theta(c-\bar{c})^{-1} \dot{c}]$$

$$n-m = m-\rho-\theta(c-\bar{c})^{-1} \dot{c}$$

$$\theta(c-\bar{c})^{-1} \dot{c} = n-\rho$$

$$\dot{c} = \frac{1}{\theta} (n-\rho) (c-\bar{c})$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} (n-\rho) \left(\frac{c-\bar{c}}{c} \right)$$

$$\boxed{\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} (n-\rho) \left(1 - \frac{\bar{c}}{c} \right)} \quad (6)$$

COM UM AUMENTO NO CONSUMO DE SUBSISTÊNCIA $\bar{c}$ A TAXA DE CRESCIMENTO DO CONSUMO DIMINUIRÁ, POIS QUANDO $\bar{c}$ AUMENTA HÁ UMA REDUÇÃO DO NÍVEL DE POUPANÇA DAS FAMÍLIAS E, DESSA FORMA, O CONSUMO DO PERÍODO SEGUINTE REDUZIRÁ.

6.iii * SABE-SE QUE $\bar{c} = \frac{c}{e^{xt}}$. LOGO,

$$\boxed{\bar{c} = c e^{-xt}} \quad (7)$$

* DERIVANDO (7) EM RELAÇÃO A t

$$\dot{\hat{c}} = c(-x)e^{-xt} + \dot{c}e^{-xt}$$

$$\dot{\hat{c}} = \dot{c}e^{-xt} - xce^{-xt}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}e^{-xt}}{\hat{c}} - \frac{xce^{-xt}}{\hat{c}}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}e^{-xt}}{ce^{-xt}} - \frac{xce^{-xt}}{ce^{-xt}}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x$$

* DE (6) TEM-SE QUE

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}(\pi - \rho)\left(1 - \frac{\bar{c}}{c}\right) - x$$

* SABE-SE QUE $\pi = f'(\hat{R}) - \delta$. ENTÃO,

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} [f'(\hat{R}) - \delta - \rho] \left(1 - \frac{\bar{c}}{c}\right) - x$$

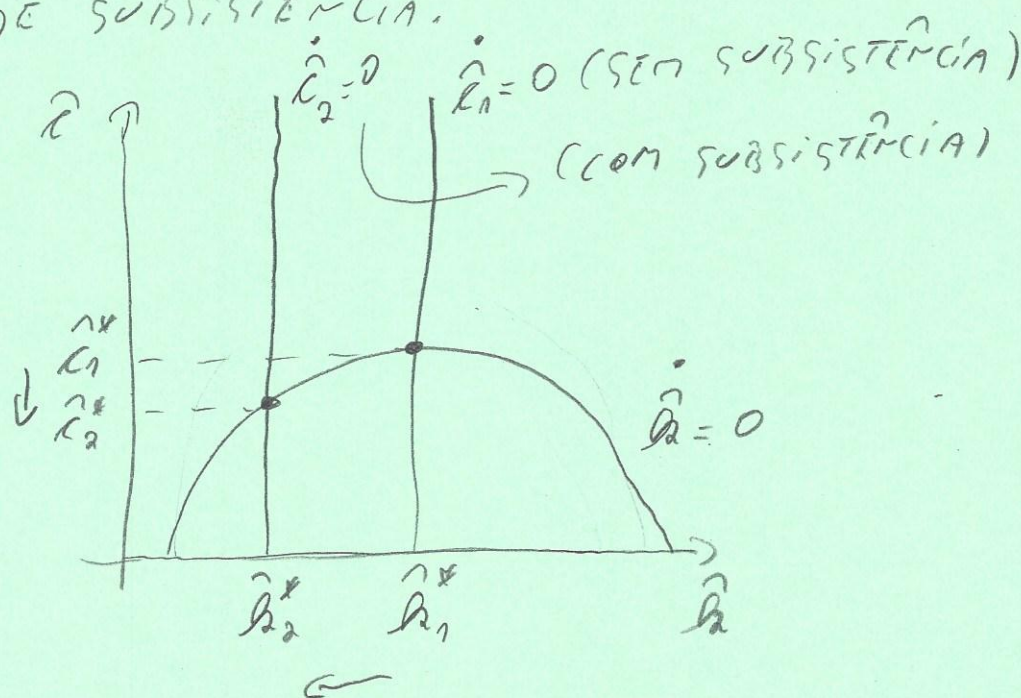
$$= \left(\frac{1}{\theta} - \frac{\bar{c}}{\theta c}\right) [f'(\hat{R}) - \delta - \rho] - x \quad (6')$$

$$= \frac{1}{\theta} [f'(\hat{R}) - \delta - \rho - \theta x] - \frac{\bar{c}}{\theta c} [f'(\hat{R}) - \delta - \rho]$$

* UMA VEZ QUE $\left(\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}}\right)' = \frac{1}{\theta} [f'(\hat{R}) - \delta - \rho - \theta x]$ TEM-SE QUE

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{\hat{c}}{\hat{c}} \right)' - \frac{\bar{c}}{\theta c} [f'(\hat{h}) - \delta - \rho]$$

DESSA FORMA, O LOCUS $\dot{\hat{c}}=0$ SERÁ MENOR QUANDO A FUNÇÃO DE UTILIDADE FOR DO TIPO STONE-GEARY, OU SEJA, $\hat{c}^*$ E $\hat{h}^*$ SERÃO MENORES EM RELAÇÃO A UMA FUNÇÃO SEM O CONSUMO DE SUBSISTÊNCIA.



* DE (6') TEM-SE

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \left(\frac{c - \bar{c}}{\theta c} \right) \left[f'(\hat{h}) - \delta - \rho - x \frac{\theta c}{c - \bar{c}} \right]$$

NO SS $\dot{\hat{c}}=0$. LOGO,

$$f'(\hat{h}) = \delta + \rho + x \frac{\theta c}{c - \bar{c}}$$

96.A

QUESTÃO 07:

7.i * ANTES DA TAXAÇÃO

$$\dot{\hat{h}} = f(\hat{h}) - \hat{c} - (x+m)\hat{h} \quad \text{pois } \delta = 0$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} [f'(\hat{h}) - c - \theta x]$$

NO LOCUS $\dot{\hat{h}} = 0$ TEM-SE

$$\hat{c} = f(\hat{h}) - (x+m)\hat{h}$$

NO LOCUS $\dot{\hat{c}} = 0$ TEM-SE

$$f'(\hat{h}) = c + \theta x$$

* APÓS A TAXAÇÃO

$$\dot{\hat{h}} = f(\hat{h}) - \hat{c} - (x+m)\hat{h}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta} [(1-\tau_c)f'(\hat{h}) - c - \theta x]$$

NO LOCUS $\dot{\hat{h}} = 0$ TEM-SE

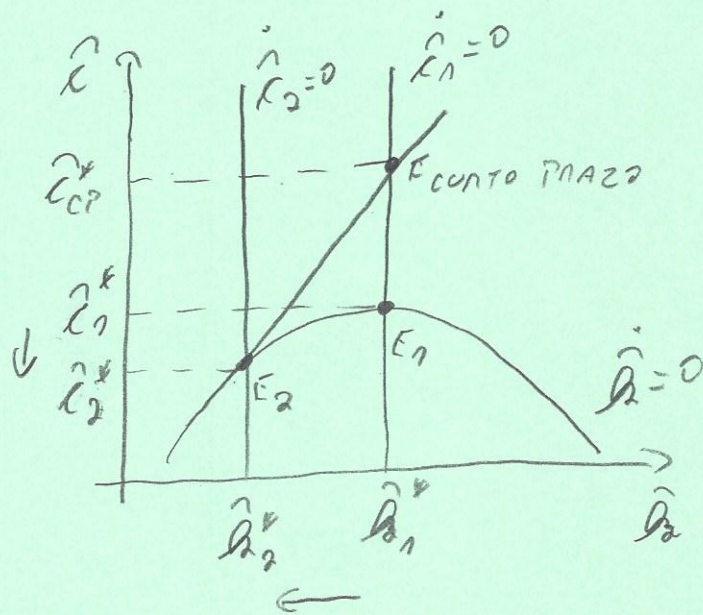
$$\hat{c} = f(\hat{h}) - (x+m)\hat{h} \quad (\text{OU SEJA, NÃO SE ALTERA})$$

NO LOCUS $\dot{\hat{c}} = 0$ TEM-SE

$$f'(\hat{h}) = \frac{c + \theta x}{1 - \tau_c}$$

APÓS A TAXAÇÃO O LOCUS $\dot{\tilde{c}}=0$ DESLOCA-SE PARA A ESQUERDA REDUZINDO OS VALORES DE $\tilde{c}$ E $\tilde{h}$ DO SS, POIS A TAXAÇÃO REDUZ O RETORNO DOS ATIVOS PRIVADOS r , SENDO ASSIM, HÁ UMA QUEDA NO ESTÍMULO A POUPAR.

POR SUA VEZ, O LOCUS $\dot{\tilde{h}}=0$ NÃO SE ALTERA, POIS O GOVERNO NÃO REALIZA GASTOS COM A TAXAÇÃO, MAS REALIZA APENAS TRANSFERÊNCIAS LUMP-SUM QUE NÃO DISTORCEM A ECONOMIA.



7.ii) NO TEMPO t_0 , OU SEJA, NO CURTO PRAZO, COMO $\dot{\tilde{h}}$ NÃO SE ALTERA, HÁ UM AUMENTO DO CONSUMO, POIS A TAXAÇÃO DOS ATIVOS PRIVADOS REDUZ O RETORNO DOS ATIVOS PRIVADOS FAZENDO COM QUE AS FAMÍLIAS SUBSTITUAM CONSUMO FUTURO POR CONSUMO PRESENTE.

AS DÍNÂMICAS SÃO REPRESENTADAS POR:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{1}{\theta} [1'(\tilde{h}) - \rho - \theta x]$$

$$\dot{\tilde{h}} = 1(\tilde{h}) - \tilde{c} - (x+m)\tilde{h}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MACROECONOMIA I

(78)

7.iii) UMA VEZ QUE A TAXAÇÃO REDUZ O RETORNO DOS ATIVOS PRIVADOS, DESESTIMULANDO A POUPEIRIA, ENTÃO DE E O DO SS DETERMINAÇÃO.

of. A