NIVELAMENTO MATEMÁTICA 2012

Prof.(es): Dr. Valter José Stülp e Dr. Silvio Hong Tiing Tai
Monitor: Alexandre Rodrigues Loures

SUMÁRIO

1. LOGARITMOS

Sejam $a > 0$ e $a \neq 1$ e $x > 0$. O número real y tal que $a^y = x$ denomina-se logaritmo de x na base a e escreve-se:

$$y = log_a x$$

Exemplos:

1. $log_5 25 = 2, pois, 5^2 = 25$
2. $log_{10} 1.000 = 3, pois, 10^3 = 1.000$
3. $log_4 256 = 4, pois, 4^4 = 256$
4. $log_2 \frac{1}{8} = -3, pois, 2^{-3} = \frac{1}{8}$

Em particular, se a = 10, dizemos que y é o logaritmo decimal de x e neste caso, escrevemos:

$$y = \log x$$

Quando a = e (e ≌ 2,718281), dizemos que y é o logaritmo natural de x e escrevemos:

$$y = \ln x$$

1.1. Mudança de base

A expressão seguinte permite o cálculo do logaritmo de x na base b, conhecido o logaritmo de x na base a:

$$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$$

Exemplos:

1. $log_8 7 = \frac{\log 7}{\log 8} = \frac{0{,}8451}{0{,}9031} = 0{,}9358$
2. $log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} = \frac{0{,}6990}{0{,}7782} = 0{,}8982$

Em particular, se a = e e b = 10 temos:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

1.2. Propriedades dos logaritmos

1. $\ln 1 = 0$;
2. $\ln \mathrm{e} = 1$;
3. Logaritmo do produto: $\ln(a\,.\,b) = \ln a + \ln b$;
4. Logaritmo do quociente: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; e
5. Logaritmo de uma potência: $\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$.

OBS: As propriedades acima são válidas tanto para o logaritmo na base e, ou seja, logaritmo neperiano, quanto para os logaritmos em qualquer outra base (log_6; log_8; ...).

EXERCÍCIOS

Sabendo que $\log 7 = 0{,}845098$; $\log 6 = 0{,}778151$; $\log 5 = 0{,}69897$; $\log 4 = 0{,}60206$; $\log 8 = 0{,}90309$; $\log 2 = 0{,}30103$; $\log 3 = 0{,}477121$ e $\log 9 = 0{,}954242$ e aplicando as propriedades de logaritmos pede-se:

a. $\log 48$
b. $\log 42$
c. $\log 20$
d. $\log 49$
e. $\log 25$
f. $\log 36$
g. $\log \frac{2}{3}$
h. $\log \frac{4}{5}$
i. $\log \frac{3}{4}$
j. $\log 2401$
k. $\log 360$
l. $\log 84$

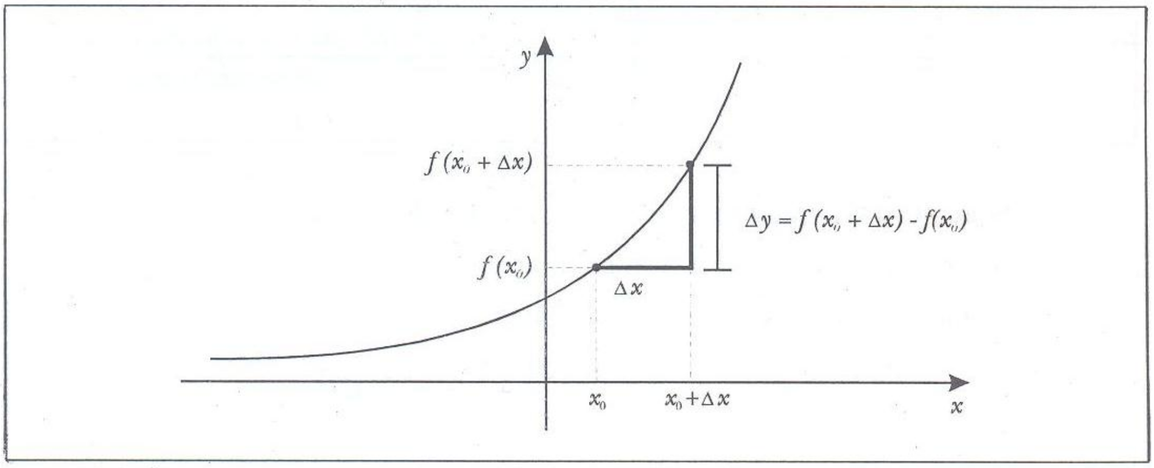
2. *DERIVADAS*

2.1. Taxa média de variação

Seja f uma função definida num conjunto D e x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois pontos de D. Quando a variável x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx, o correspondente valor da função passa de $f(x_0)$ para o valor $f(x_0 + \Delta x)$ sofrendo, portanto, uma variação:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

conforme mostra a figura seguinte:



O quociente

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

recebe o nome de *taxa média de variação* da função quando x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$ e expressa a variação média sofrida pelos valores da função entre estes dois pontos.

Exemplo:

Seja a função f tal que $f(x) = x^2, x \in R$. Quaisquer que sejam dois pontos x_0 e $x_0 + \Delta x$ temos:

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \frac{{x_0}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

isto é, a taxa média de variação de f entre dois pontos quaisquer x_0 e $x_0 + \Delta x$ é, neste caso, $2x_0 + \Delta x$.

Se, por exemplo, $x_0 = 4$ e $\Delta x = 0{,}2$ temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8 + 0{,}2 = 8{,}2$$

Se, por exemplo, $x_0 = -1$ e $\Delta x = -0{,}1$ temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 - 0{,}1 = -2{,}1$$

2.2. Derivada de uma função num ponto

2.2.1. Introdução

No item anterior estudamos o quociente

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

que, como vimos, expressa a taxa média de variação da função f quando x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$.

Estamos agora interessados em estudar o comportamento dos valores desta taxa média para pequenas variações Δx.

Uma das maneiras de examinarmos este comportamento consiste em avaliar o limite do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$, pois tal limite, caso exista, nos fornece um valor aproximado do quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para pequenos valores de Δx.

Por exemplo, se $f(x) = x^2$, a taxa média de variação entre os pontos x_0 e $x_0 + \Delta x$ é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Mas,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

que é um valor aproximado de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para pequenos valores de Δx.

2.2.2. Definição de derivada

Seja f uma função definida num intervalo aberto $]a, b[$ e x_0 um ponto deste intervalo.

O limite,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

quando existe, isto é, quando é um número real, recebe o nome de *derivada da função f no ponto* x_0. Ou de outra forma, que f é derivável no ponto x_0.

Dizer que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

significa dizer que $f'(x_0)$ mede aproximadamente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para pequenos valores de Δx.

Exemplo

Calcular e interpretar o valor da derivada da função $y = x^2$ no ponto $x_0 = 2$.

Solução

A derivada de $y = x^2$, no ponto $x_0 = 2$, é dada pelo limite:

$$y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

Como

$$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

e

$$f(2) = 2^2 = 4$$

então,

$$\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4}{\Delta x}=4+\Delta x$$

e

$$y'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

Interpretação

a. A taxa média de variação $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ nas proximidades do ponto $x_0=2$ é aproximadamente 4.

Isto significa que, em pequenos intervalos contendo o ponto $x_0=2$, a variação Δy correspondente é dada aproximadamente por:

$$\Delta y=4\,\Delta x$$

Assim:

no intervalo [1,5;2]	$\Delta y\cong 4\,(0{,}5)=2$;
no intervalo [1,85;2,20]	$\Delta y\cong 4\,(0{,}35)=1{,}40$; e
no intervalo [2;2,55]	$\Delta y\cong 4\,(0{,}55)=2{,}20$.

b. A derivada da função no ponto pode também ser interpretada como valor marginal ou tendência neste ponto. No caso, a tendência da função $y=x^2$ no ponto $x_0=2$ é de crescimento 4.

A derivada das funções usuais pode ser obtida rapidamente com o auxílio das fórmulas de derivação (Tabela 1 do anexo).

2.3. Funções Compostas: Regra da Cadeia

Seja f uma função de duas variáveis, definida num conjunto D. Sejam $x=g(t)$ e $y=h(t)$ duas funções definidas num intervalo $]a,b[$, com $\big(g(t),h(t)\big)\in D$, para todo $t\ \in\,]a,b[$. A função F, definida em $]a,b[$ e tal que:

$$F(t)=f(g(t),h(t))$$

é denominada função composta de f com g e h.

Exemplos

Seja f a função definida no R^2 e tal que $f(x,y) = e^{3x+y^3}$. Sejam as funções g e h definidas em R e tais que:

$$x = g(t) = t^2 - 2t \text{ e } y = h(t) = t^3$$

Então, a função f definida em R e tal que:

$$F(t) = f\big(g(t), h(t)\big) = e^{3(t^2-2t)+(t^3)^3} = e^{t^9+3t^2-6t}$$

é a função composta de f com g e h.

Logo, a derivada de $F(t) = e^{t^9+3t^2-6t}$é:

$$\frac{dF}{dt} = (9t^8 + 6t - 6)e^{t^9+3t^2-6t}$$

Mas,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{3x+y^3}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 3e^{3x+y^3}(2t-2) + 3y^2 e^{3x+y^3}(3t^2)$$
$$= e^{t^9+3t^2-6t}(6t - 6 + 3(t^3)^2 3t^2) = (9t^8 + 6t - 6)e^{t^9+3t^2-6t}$$

Assim, podemos facilmente verificar que:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

EXERCÍCIOS

a. $y = 20$
b. $y = x^3$
c. $y = 4x^2$
d. $y = 3x^3 + 20$

e. $y = 10x + 5$
f. $y = x^2 - 6x + 8$
g. $y = x^3 - 10x^2 + 50$
h. $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 10x + 1$
i. $y = \frac{x^4 - 6x^2 + 20}{10}$
j. $y = 12x^{0,5}$
k. $y = e^{10-2x}$
l. $y = e^{2x}$
m. $y = 3e^{2x+1}$
n. $y = 5e^x$
o. $y = 5e^x + 10\ln x - 8$
p. $y = 3e^x$
q. $y = 5\ln x$
r. $y = \ln x$
s. $y = 2\ln x$
t. $y = 10^x$
u. $y = 3^x$
v. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
w. $y = (x^2 - 1)^5$
x. $y = 4(1 - x)^5$
y. $y = (x^3 - 10x^4)^3$
z. $y = e^{2x}$
aa. $y = e^{\ln x}$
bb. $y = e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$
cc. $y = \ln(x^2 + 3x + 9)$
dd. $y = \ln(\sqrt{2}\,x^2)$

ee. $y = \ln\left(\frac{4}{x} + 1\right)$
ff. $y = (10)^{3-x}$
gg. $y = 3^{-0,1x^2}$
hh. $y = 10^{1-6x}$
ii. $y = \sqrt{3}\,x^3 - x^2 \ln 4 + 10$
jj. $y = x^4 \ln 3 - \frac{x^2}{2} + 1$
kk. $y = \frac{4}{3}x^6 - 0,4x^5 - \frac{1}{10}x^2$
ll. $y = 4x^3e^x$
mm. $y = -x^3e^x$
nn. $y = \frac{1}{4}x^5(1 - 2x)$
oo. $y = \frac{4}{x}$
pp. $y = \frac{10}{x^2}$
qq. $y = \frac{-1}{x^2}$
rr. $y = \frac{4x}{x-1}$
ss. $y = \frac{x}{1-x}$
tt. $y = \frac{x}{e^x}$
uu. $z = 2x + 3y + 1 \quad (Em\ que, x = g(t) = t^2 \quad e \quad y = h(t) = 3t + 1)$
vv. $z = e^{3x+y^3} \quad (Em\ que, x = g(t) = t^2 - 2t \quad e \quad y = h(t) = t^3)$
ww. $z = x^2 + y^2 - 1 \quad (Em\ que, x = g(x) = x \quad e \quad y = h(x) = 3x - 1)$

3. MATRIZES

3.1. Algumas definições

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ cujos coeficientes fora da diagonal são todos nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, é chamada uma matriz diagonal.

Exemplo

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{2x2} \qquad \text{e} \qquad H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$, cujos termos sobre a diagonal principal são iguais, ou seja, $a_{ij} = c$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é chamada uma matriz escalar.

Exemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e é chamada triangular inferior se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ é chamada simétrica se $A^T = A$. Ou seja, A é simétrica se for uma matriz quadrada para a qual $a_{ij} = a_{ji}$. Se A for simétrica, então os elementos de A são simétricos em relação à diagonal principal de A.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad \text{e} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

3.2. Álgebra matricial

Definiremos algumas operações que permitirão criar novas matrizes a partir de matrizes dadas. Essas operações são úteis nas aplicações das matrizes.

3.2.1. Adição ou subtração matricial

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes m x n então a soma ou subtração de A e B é a matriz $C = [c_{ij}]$ m x n, definida por:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

ou seja, C é obtida adicionando ou subtraindo elementos correspondentes de A e B.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2x3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Então

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Note que a soma ou subtração das matrizes A e B estão definidas somente quando A e B têm o mesmo número de linhas e de colunas, ou seja, somente quando A e B são de mesma forma, tipo ou ordem. No exemplo acima A e B são 2 x 3, isto é, possuem duas linhas e três colunas.

3.2.1.1. Propriedades da adição de matrizes

a. Propriedade comutativa: $A + B = B + A$;
b. Propriedade associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
c. Existe uma única matriz O m x n, tal que $A + O = A$ para qualquer matriz A m x n, a matriz O é chamada de matriz nula m x n; e
d. Para cada matriz A m x n, existe uma única matriz D m x n tal que $A + D = 0$. A matriz D é chamada de negativa de A e pode ser representada por –A.

3.2.2. Multiplicação matricial

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz m x p e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz p x n, então o produto de A e B é a matriz $C = [c_{ij}]$ m x n, definida por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{ip} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

Essa equação diz que o (i, j)-ésimo elemento da matriz produto é calculado adicionando todos os produtos obtidos multiplicando cada elemento na i-ésima linha de A pelo elemento correspondente na j-ésima coluna de B (mostrado abaixo). Assim, o produto de A e B é definido somente quando o número de linhas de B é exatamente igual ao número de colunas de A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}_{mxp} x \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}_{pxn} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(-2) + (2)(4) + (-1)(2) & (1)(5) + (2)(-3) + (-1)(1) \\ (3)(-2) + (1)(4) + (4)(2) & (3)(5) + (1)(-3) + (4)(1) \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Algumas considerações sobre o produto BA:

a. BA pode não estar definida; isto acontecerá se $n \neq m$;
b. Se BA estiver definida, o que significa que $m = n$, então BA é p x p enquanto que AB é m x m; assim, se $m \neq p$, AB e BA são de formas diferentes;
c. Se AB e BA forem ambas de mesma forma, podem ser iguais; e
d. Se AB e BA forem ambas de mesma forma, podem ser diferentes.

3.2.2.1. Propriedades da multiplicação de matrizes

a. Propriedade associativa: se A, B e C têm as formas apropriadas, então $A(BC) = (AB)C$;

b. Propriedade distributiva: se A, B e C têm as formas apropriadas, então $A(B+C) = AB + AC$ ou $(A+B)C = AC + BC$;
c. Em geral o produto de matrizes não é comutativo, contudo, quando $AB = BA$, as matrizes dizem-se permutáveis ou comutáveis;
d. $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$, em que $\emptyset$ é uma matriz nula; e
e. $AI = IA = A$, em I é a matriz identidade.

3.2.3. Multiplicação por escalar

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz m x n e r um número real, então a multiplicação da matriz A pelo escalar r, rA, é a matriz $B = [b_{ij}]$ m x n, em que

$$b_{ij} = ra_{ij} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

ou seja, B é obtida multiplicando cada elemento de A por r.

Exemplo

Se $r = -3$ e $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$ então:

$$rA = -3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} (-3)(4) & (-3)(-2) & (-3)(3) \\ (-3)(2) & (-3)(-5) & (-3)(0) \\ (-3)(3) & (-3)(6) & (-3)(-2) \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} -12 & 6 & -9 \\ -6 & 15 & 0 \\ -9 & -18 & 6 \end{bmatrix}_{3x3}$$

3.2.3.1. Propriedades da multiplicação por escalar

Se r e s são números reais e A e B são matrizes, então:

a. Propriedade comutativa: $r(sA) = (rs)A$;
b. Propriedade distributiva: $(r+s)A = rA + sA$ ou $r(A+B) = rA + rB$; e
c. $A(rB) = r(AB) = (rA)B$.

3.3. Transposta de uma matriz

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz m x n, então a matriz n x m $A^T = [a_{ij}^T]$ em que

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

é chamada de transposta de A. Assim, a transposta de A é obtida trocando a posição relativa das linhas e das colunas de A.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{1x3} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3x1} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3x3} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Então

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}_{3x1} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{1x3} \quad C^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x3} \quad D^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3x2}$$

3.3.1. Propriedades da transposta

a. $(A^T)^T = A$;
b. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
c. $(AB)^T = B^T A^T \quad (\neq A^T B^T)$; e
d. $(rA)^T = rA^T$.

3.4. Inversa de uma matriz

Uma matriz A n x n é chamada não-singular (ou inversível) se existe uma matriz B n x n tal que

$$AB = BA = I_n$$

A matriz B é chamada de uma inversa de A. Se não existe uma tal matriz B, então A é chamada singular (ou não-inversível).

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2x2} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

como

$$AB = BA = I_2,$$

concluímos que B é uma inversa de A e que A é não-singular e representamos a inversa de A, quando ela existe, por A^{-1}. Se uma matriz tem uma inversa, então a inversa é única.

3.4.1. Método prático para achar a inversa de uma matriz

PRIMEIRO PASSO: forme a matriz n x $2n$ $[A \vdots I_n]$ obtida juntando a matriz identidade I_n à matriz A dada.

SEGUNDO PASSO: leve a matriz obtida no primeiro passo à forma reduzida escalonada por linhas usando operações elementares sobre linhas. Lembre-se de que tudo o que fizermos com uma linha de A deve também ser feito com a linha correspondente de I_n.

TERCEIRO PASSO: suponha que o segundo passo obteve a matriz $[C \vdots D]$ sob forma reduzida escalonada por linhas.

a. Se $C = I_n$, então $D = A^{-1}$; e
b. Se $C \neq I_n$, então C tem uma linha de zeros. Nesse caso, A é singular e A^{-1} não existe.

Exemplo

Ache a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

PRIMEIRO PASSO. A matriz 3 x 6 $[A \vdots I_3]$ é

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x6}$$

SEGUNDO PASSO. Transformamos a matriz obtida no primeiro passo levando-a à forma reduzida escalonada por linhas.

a. Subtraia 5 vezes a primeira linha da terceira para obter:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x6}$$

b. Divida a segunda linha por 2 para obter:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x6}$$

c. Subtraia a segunda linha da primeira para obter:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x6}$$

d. Multiplique a terceira linha por $-\frac{1}{4}$ para obter:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}_{3x6}$$

e. Adicione $-\frac{3}{2}$ vezes a terceira linha à segunda para obter:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}_{3x6}$$

f. Adicione $\frac{1}{2}$ vez a terceira linha à primeira para obter:

$$[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}_{3x6}$$

TERCEIRO PASSO: como o lado direito da matriz aumentada $[A \vdots I_3]$ é uma matriz identidade I_3 concluímos que o lado esquerdo da matriz aumentada $[A \vdots I_3]$ é a matriz inversa da matriz A. Ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}_{3x3}$$

3.4.2. Propriedades da inversa

a. Se A é uma matriz não-singular, então A^{-1} é não-singular e $(A^{-1})^{-1} = A$;
b. Se A e B são matrizes não-singulares, então AB é não-singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; e
c. Se A é uma matriz não-singular, então $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

EXERCÍCIOS

Dada as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3x3} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3x3} \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2x2} \quad F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2x2} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3x2}$$

pede-se:

a. $A + C$
b. $B + D$
c. $E + F$
d. BD
e. EF
f. AG
g. GF
h. $3A$
i. $-4D$
j. $\frac{3}{4}G$
k. F^T
l. B^T
m. C^T
n. E^{-1}
o. D^{-1}
p. B^{-1}

4. ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN

Nesta seção, utilizaremos o método familiar da eliminação de incógnitas para a solução de sistemas lineares e obteremos assim um método útil para resolver tais sistemas. Este método parte da matriz aumentada do sistema linear dado e obtém uma matriz de certa forma especial. Essa nova matriz representa um sistema linear que tem exatamente as mesmas soluções que o sistema dado.

Uma matriz m x n está em forma reduzida escalonada por linhas quando satisfaz as seguintes propriedades:

a. Todas as linhas que são formadas unicamente por zeros estão situadas abaixo das linhas não-nulas da matriz;
b. O primeiro coeficiente não-nulo em cada linha que não é composta exclusivamente de zeros é 1, chamado de coeficiente líder de sua linha;
c. Se as linhas i e $i + 1$ são duas linhas sucessivas que não consistem exclusivamente em zeros, então o coeficiente líder da linha $i + 1$ está à direita do coeficiente líder da linha i; e
d. Se uma coluna contém um coeficiente líder de alguma linha, então todos os outros coeficientes nessa coluna são nulos.

Observe que uma matriz sob a forma reduzida escalonada por linhas pode não ter nenhuma linha formada exclusivamente por zeros.

Exemplos

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x5}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5x5}$$

estão em forma reduzida escalonada por linhas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3x4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

não estão em forma reduzida escalonada por linhas, pois não satisfazem as propriedades (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

Observe que, quando uma matriz está na forma reduzida escalonada por linhas, os coeficientes líderes das linhas não-nulas formam uma "escada".

Uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz $A = [a_{ij}]$ m x n é qualquer uma das seguintes operações:

a. Troque as posições relativas das linhas r e s de A. Isto é, substitua $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$ por $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ e $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ por $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$;

b. Multiplique a linha r de A por $c \neq 0$. Isto é, substitua $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$ por $ca_{r1}, ca_{r2}, \dots, ca_{rn}$; e

c. Adicione d vezes a linha r de A à linha s de A, $r \neq s$. Isto é, substitua $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ por $a_{s1} + da_{r1}, a_{s2} + da_{r2}, \dots, a_{sn} + da_{rn}$.

Mostraremos agora como transformar uma dada matriz, aplicando as operações elementares sobre as linhas dessa matriz, em uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas, ou seja, demonstraremos o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Trocando as posições relativas das linhas 1 e 3, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Multiplicando a linha 1 por $\frac{1}{3}$, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Adicionando -2 vezes a linha 1 à linha 2, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Adicionando -1 vez a linha 2 à linha 1, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Adicionando -6 vezes a linha 3 à linha 1, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Adicionando 4 vezes a linha 3 à linha 2, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x4}$$

esta última matriz está na forma reduzida escalonada por linhas.

O processo que acabamos de ilustrar será usado tantas vezes quanto necessário até que se chegue à matriz na forma escalonada reduzida.

Dizemos que uma matriz A m x n é equivalente por linhas a uma matriz B m x n se B pode ser obtida pela aplicação de uma sequencia finita de operações elementares sobre as linhas de A.

4.1. Solução de sistemas lineares

Aplicaremos agora o método de eliminação de Gauss-Jordan para solução de sistemas lineares.

Seja

$$AX = B$$

em que

$A \rightarrow$ a matriz dos coeficientes;
$X \rightarrow$ é o vetor das incógnitas; e
$B \rightarrow$ é o vetor das constantes.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

então a representação desse sistema em matriz será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3x4} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4x1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3x1}$$

O processo de eliminação de Gauss-Jordan para resolver o sistema linear $AX = B$ é como segue:

a. PRIMEIRO PASSO. Forme a matriz aumentada $[A \vdots B]$.
b. SEGUNDO PASSO. Leve a matriz aumentada à forma reduzida escalonada por linhas, usando as operações elementares sobre linhas.
c. TERCEIRO PASSO. O sistema linear que corresponde à matriz em forma reduzida escalonada que foi obtida no segundo passo tem exatamente as mesmas soluções que o sistema linear dado. Para cada linha não-nula da matriz em forma reduzida escalonada, resolva a equação correspondente para a incógnita que corresponde ao coeficiente líder da linha. As linhas formadas totalmente por zeros podem ser desprezadas, pois as equações correspondentes serão satisfeitas para quaisquer valores das incógnitas.

Observe que quando uma matriz é considerada como a matriz aumentada de um sistema linear, as operações elementares com linhas são equivalentes, respectivamente, a trocar a posição relativa de duas equações, multiplicar uma equação por uma constante não-nula e adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação.

Exemplos

a. Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

usando o processo de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução

PRIMEIRO PASSO. A matriz aumentada desse sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}_{3x4}$$

SEGUNDO PASSO. A matriz aumentada é equivalente à matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}_{3x4}$$

que está na forma reduzida escalonada por linhas.

TERCEIRO PASSO. O sistema linear representado por esta última matriz é:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

de modo que a única solução do sistema linear dado é $x = 2; y = -1\ e\ z = 3$.

b. Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ 2x + y - z + 3w = -11 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases}$$

usando o processo de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução

PRIMEIRO PASSO. A matriz aumentada desse sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & \vdots & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & \vdots & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & \vdots & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & \vdots & -5 \end{bmatrix}_{4x5}$$

SEGUNDO PASSO. A matriz aumentada é equivalente por linhas à matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \vdots & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{4x5}$$

que está em forma reduzida escalonada por linhas.

TERCEIRO PASSO. O sistema linear representado por esta última matriz é:

$$\begin{cases} x + 2w = -5 \\ y - 3w = 2 \\ z - 2w = 3 \end{cases}$$

A linha composta somente por zeros foi desprezada.

Achando, em cada equação, a incógnita que corresponde ao coeficiente líder de cada linha, obtemos

$$x = -5 - 2r$$

$$y = 2 + 3r$$

$$z = 3 + 2r$$

$$w = r$$

em que r é um número real arbitrário. Assim os valores acima para x, y, z e w são a solução do sistema linear dado. Como r pode ser um número real qualquer, o sistema linear dado tem infinitas soluções.

c. Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

usando o processo de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução

PRIMEIRO PASSO. A matriz aumentada desse sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & \vdots & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & \vdots & 9 \end{bmatrix}_{4x7}$$

SEGUNDO PASSO. A matriz aumentada é agora equivalente à matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{4x7}$$

TERCEIRO PASSO. O sistema linear representado por esta última matriz é:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_6 = 1 \\ x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

Achando em cada equação a incógnita que corresponde ao coeficiente líder em cada linha, obtemos:

$$x_1 = r + 3s - 2t$$
$$x_2 = t$$
$$x_3 = 1 - 2r$$
$$x_4 = s$$
$$x_5 = 2 - r$$
$$x_6 = r$$

em que $r, s\ e\ t$ são números reais arbitrários. Como $r, s\ e\ t$ podem ter quaisquer valores reais, o sistema linear dado possui infinitas soluções. Assim os valores acima para $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ e\ x_6$ são a solução do sistema linear dado.

d. Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - z - 2w = -6 \end{cases}$$

usando o processo de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução

PRIMEIRO PASSO. A matriz aumentada desse sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \vdots & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix}_{3x5}$$

SEGUNDO PASSO. A matriz aumentada é equivalente por linhas à matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}_{3x5}$$

TERCEIRO PASSO. A última equação do sistema linear representada nessa última matriz é:

$$0x + 0y + 0z + 0w = 1$$

que não possui soluções, quaisquer que sejam $x, y, z\ e\ w$. Consequentemente, o sistema linear dado não tem solução.

EXERCÍCIOS

Para os quatros exemplos acima, faça todo o processo de eliminação de Gauss-Jordan para provar as matrizes na forma reduzida escalonada por linhas representadas no segundo passo de cada exemplo.

5. REGRA DE CRAMER

Para resolver um sistema linear de n equações e n incógnitas cuja matriz dos coeficientes seja não-singular, ou seja, possui inversa, podemos utilizar um outro método, conhecido como regra de Cramer.

Observe que para utilizar esse método é necessário que o número de equações seja idêntico ao número de incógnitas.

A regra de Cramer para resolver o sistema linear $AX = B$, em que A é n x n, é como segue:

PRIMEIRO PASSO. Calcule $|A|$. Se $|A| = 0$, a regra de Cramer não é aplicável.

Pois quando $|A| = 0$ implica que a matriz dos coeficientes é singular, ou seja, não há a inversa da matriz A.

SEGUNDO PASSO. Se $|A| \neq 0$, então, para cada i,

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

em que A_i é a matriz de A substituindo a i-ésima coluna de A por B.

Exemplo

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Assim, a matriz dos coeficientes deste sistema linear é:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Então o determinante dessa matriz é:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Portanto, os valores das incógnitas será:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Observamos que a regra de Cramer é aplicável somente no caso em que temos n equações e n incógnitas, ou seja, para sistemas lineares que possuem solução única, e em que a matriz A dos coeficientes é não-singular. A regra de Cramer torna-se computacionalmente ineficiente para $n > 4$, e é então melhor usar o processo de eliminação de Gauss-Jordan, discutido na seção anterior.

EXERCÍCIOS

Encontre a solução dos sistemas lineares abaixo utilizando a regra de Cramer.

a. $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = -5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + z - 2w = -4 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ x - y + w = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

ANEXO

Tabela 1 – Tabela de derivadas

Funções simples			Funções compostas	
(1)	$y = k$	$y' = 0$		
(2)	$y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$	$y = u^{\alpha}$	$y' = \alpha\, u^{\alpha-1}. u'$
(3)	$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$	$y = e^{u}$	$y' = e^{u}\, . u'$
(4)	$y = ln\, x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
(5)	$y = a^{x}$	$y' = a^{x}\, ln\, a$	$y = a^{u}$	$y' = a^{u} \ln a\, . u'$
Operações				
(1)	$(u \pm v)' = u' \pm v'$			
(2)	$(u\,.\,v)' = u\,.\,v' + v\,.\,u'$			
(3)	$(k\,.\,u)' = k\,.\,u'$			
(4)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\,.\,u' - u\,.\,v'}{v^{2}}$			
(5)	$h = v\big(u(x)\big) \Rightarrow h' = v'\big(u(x)\big). u'(x)$			

6. BIBLIOGRAFIA

ALESKEROV, F.; ERSEL, H. e PIONTKOVSKI, D.. **Linear Algebra for Economists.** 1ª ed. New York: Springer, 2011, 330 p..

ALLEN, R. G. D.. **Mathematical Economics.** 1ª ed. London: Editora Macmillan & Company Limited, 1956, 768 p..

ANTON, H. e RORRES, C.. **Álgebra linear com aplicações.** 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2008, 572 p..

ANTON, H.; BIVENS, I. e DAVIS, S.. **Cálculo.** vol. 1, 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007, 581 p..

_________ **Cálculo.** vol. 2, 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007, 1187 p..

CHIANG, A. C. e WAINWRIGHT, K.. **Matemática para economista.** 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006, 692 p..

GOLDSTEIN, L. J.; SCHNEIDER, D. I.; LAY, D. C. e ASMAR, N.H.. **Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade.** 12ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2011, 656 p..

HOY, M.; LIVERNOIS, J.; MCKENNA, C.; REES, R. e STENGOS, T.. **Mathematics for Economics.** 3ª ed. Massachuetts: The MIT Press, 2011, 959 p..

KOLMAN, B.. **Álgebra Linear.** 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A., 1987, 226 p..

LEITHOLD, L.. **Matemática aplicada à economia e administração.** 1ª ed. São Paulo: Editora Harbra, 1998, 548 p..

LIMA, E. L.. **Álgebra linear.** 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009, 357 p..

LIPSCHUTS, S. e LIPSON, M.. **Álgebra linear (Coleção Schaum).** 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2011, 432 p..

MUNEM, M. A. e FOULIS, D. J.. **Cálculo.** vol. 1, 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A., 1982, 605 p..

_________ **Cálculo.** vol. 2, 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara S.A., 1982, 1.033 p..

SILVA, S. M. da; SILVA, E. M. da e SILVA, E. M.. **Matemática para os cursos de economia, administração e ciências contábeis.** vol. 1, 5ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999, 309 p..

_________ **Matemática para os cursos de economia, administração e ciências contábeis.** vol. 2, 4ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 1997, 195 p..

SIMON, C. P. e BLUME, L.. **Matemática para economistas.** 1ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2004, 920 p..

STEWART, J.. **Cálculo.** vol. 1, 6ª ed. americana. São Paulo: Cengage Learning, 2011, 533 p..

_________ **Cálculo.** vol. 2, 6ª ed. americana. São Paulo: Cengage Learning, 2011, 1.077 p..

VERAS, L. L.. **Matemática aplicada à economia.** 3ª ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 1999, 247 p..