

ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN

EXEMPLO A

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} x(-2) \quad x(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ x(-\frac{2}{5}) \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ x(-2) \quad x(6) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ x(-\frac{1}{4}) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ x(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

CONTINUA NA PÁGINA 34

EXEMPLO B

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - 2z - 9w = -3 \\ 2x + y - 2z + 3w = -17 \\ x - 3y + 2z + 7w = -3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -17 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -17 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x(-2) \quad x(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 11 & -9 \\ 0 & -1 & -9 & 13 & -17 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \sim \\ \leftarrow \sim \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 13 & -17 \\ 0 & 3 & -9 & 11 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ x(-1) \sim \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -9 & 11 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ x(-1) x(-3) x(4) \sim \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 & -15 \\ 0 & 1 & 9 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -20 & 40 & -60 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ x(-\frac{1}{20}) \sim \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 & -15 \\ 0 & 1 & 9 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 60 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ x(-5) x(3) x(-20) \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CONTINUA NA PÁGINA 38

EXEMPLO C

32

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 6} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x(-1) \quad x(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x(-1) \quad \sim \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ x(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LOGO, O SISTEMA LINEAR EQUIVALENTE AO SISTEMA INICIAL É:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_6 = 1 \\ x_3 + x_6 = 2 \end{cases}$$

FAZENDO $x_6 = x$, EM QUE $x \in \mathbb{R}$, TEMOS

$$\begin{aligned} x_3 + x_6 &= 2 & x_3 + 2x_6 &= 1 \\ x_3 + x &= 2 & x_3 + 2x &= 1 \\ x_3 &= 2 - x & x_3 &= 1 - 2x \end{aligned}$$

FAZENDO $x_2 = t$ E $x_4 = a$, EM QUE $t \in \mathbb{R}$ E $a \in \mathbb{R}$, OBTEMOS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2t - 3a - x &= 0 \\ x_1 &= x + 3a - 2t \end{aligned}$$

SENDO ASSIM, O SISTEMA LINEAR POSSUI INFINITAS SOLUÇÕES CUJOS VALORES DAS INCÓGNITAS SÃO:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + 3a - 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 1 - 2x \\ x_4 &= a \\ x_5 &= 2 - x \\ x_6 &= x \end{aligned}$$

EXEMPLO 7

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 3 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x - 2z - 2w = -6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & | & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & | & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & | & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & | & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

LOGO, O SISTEMA LINEAR EQUIVALENTE AO SISTEMA INICIAL É:

$$\begin{cases} x - 2z - 2w = -7 \\ y + 2z + 3w = 6 \\ 0x + 0y + 0z + 0w = 1 \end{cases}$$

PORÉM,

$$0x + 0y + 0z + 0w = 1$$

NÃO É POSSÍVEL.

SENDO ASSIM, O SISTEMA LINEAR NÃO POSSUI SOLUÇÃO

CONTINUAÇÃO EXEMPLO A

LOGO, O SISTEMA LINEAR EQUIVALENTE AO SISTEMA INICIAL É:

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = -1 \\ z & = 3 \end{cases}$$

PORTANTO, O SISTEMA LINEAR POSSUI SOLUÇÃO ÚNICA CUJOS VALORES PARA AS INCÓGNITAS SÃO:

$$x = 2; y = -1 \text{ E } z = 3$$

CONTINUAÇÃO EXEMPLO B

LOGO, O SISTEMA LINEAR EQUIVALENTE AO SISTEMA INICIAL É:

$$\begin{cases} x & + 2w = -5 \\ y & - 3w = 2 \\ z - 2w & = 3 \end{cases}$$

FAZENDO $w = x$, EM QUE $x \in \mathbb{R}$, OBTENOS

$$\begin{array}{lll} z - 2w = 3 & y - 3w = 2 & x + 2w = -5 \\ z - 2x = 3 & y - 3x = 2 & x + 2x = -5 \\ z = 3 + 2x & y = 2 + 3x & x = 2x - 5 \end{array}$$

SENDO ASSIM, O SISTEMA LINEAR POSSUI INFINITAS SOLUÇÕES CUJOS VALORES DAS INCÓGNITAS SÃO:

$$\begin{aligned} x &= 2x - 5 \\ y &= 2 + 3x \\ z &= 3 + 2x \\ w &= x \end{aligned}$$