Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Faculdade de Administração, Contabilidade, Economia, Turismo e Hotelaria
Departamento de Economia
Disciplina: Economia matemática I

Prof. Silvio Tai
Abril 2012

LISTA I

Lista de Exercícios 1: Derivada

1) Ache a derivada de *ln(x)* pela definição de limite.

2) Escreva as funções *g(h(z))* e *h(g(x))* e as respectivas derivadas.
a) $g(x)=x3+8$, $h(z)=7z$
b) $g(x)=ln(x)$, $h(z)=1/z$

3) Ache a derivada de a^x pela regra da cadeia. Sugestão: Verifiquem que $a^x=e^x ln(a)$. Se isso for verdade, então $[a^x]'=[e^x ln(a)]'$.

4) Ache a derivada de $1/e^x$ pela regra de cadeia. Sugestão: $1/e^x=(e^x)^{-1}$.

5) Seja *g(u(x))* uma função composta. Demonstre a regra da cadeia pela definição de derivada (usando limite).
Sugestão:
a) Comecem com a reta secante passando pelos pontos $(x+\Delta x, g(u(x+\Delta x)))$ e $(x, g(u(x)))$ com Δx tendendo a zero.
b) Em seguida façam a seguinte substituição: $k=u(x+\Delta x)- u(x)$, lembrando que nesse caso k tenderá a zero quando Δx tenderá a zero.
c) Seguindo esses passos obtém-se $[g(u(x))]'=g'(u(x))*u'(x)$

6) Através da definição da derivada do produto $(uv)'=u'v+uv'$ e da regra da cadeia, obtenha a derivada do quociente: $[u/v]'$.

7) (Questão 3.17 , Simon and Blume)
a) Qual retângulo da figura 3.19 (pg. 63) tem a área igual à receita ótima da firma ($x=x^*$)?
b) Usando o fato que $AC(x)=C(x)/x$ e portanto $C(x)=AC(x) \times x$, encontre o retângulo cuja área dá o custo total de se produzir x^*.
c) Qual área da figura 3.19 representa a lucro ótimo da firma?

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MAT I 2012

1

QUESTÃO 01:

$f(x) = \ln x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0}{x_0} + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{x_0}{x_0}\right)\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0}{\Delta x}\left(\frac{1}{x_0}\right)\left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)\right]$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x_0} \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x_0} (\ln e)$$

$$= \frac{1}{x_0} (1)$$

$$= \frac{1}{x_0}$$

QUESTÃO 02A:

$g(x) = x^3 + 8$

$h(z) = 7z$

$f(z) = g(h(z))$

$f(z) = (7z)^3 + 8$

$= 343z^3 + 8$

$$f'(z) = g'(h(z)) \cdot h'(z)$$

$$= (x^3 + 8)' \cdot (7z)'$$

$$= 3x^2 (7)$$

$$= 3(7z)^2 (7)$$

$$= 3(49z^2)(7)$$

$$= 1.029 z^2$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MAT I 2012

$f(x) = h(g(x))$ $\rightarrow$ $f(x) = 7(x^3+8)$

$= 7x^3 + 56$

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= (7z)' \cdot (x^3+8)'$

$= 7(3x^2)$ $\rightarrow$ $f'(x) = 21x^2$

QUESTÃO 02.B:

$g(x) = \ln(x)$

$h(z) = \dfrac{1}{z}$

$f(z) = g(h(z))$ $\rightarrow$ $f(z) = \ln\left(\dfrac{1}{z}\right)$

$f'(z) = \left(\ln\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)'$

$= (\ln z^{-1})'$

$= (-1 \ln z)'$

$= -1(\ln z)'$

$= -1\left(\dfrac{1}{z}\right)$

$= -\dfrac{1}{z}$

$f'(z) = g'(h(z)) \cdot h'(z)$

$= (\ln x)' \cdot \left(\dfrac{1}{z}\right)'$

$= \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{z(1)' - (1)(z)'}{z^2}\right]$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{z}}\left[\dfrac{z(0) - (1)(1)}{z^2}\right]$

$= z\left(\dfrac{0-1}{z^2}\right)$ $\rightarrow$ $f'(z) = z\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)$

$= -\dfrac{1}{z}$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MAT I 2012

$$f(x) = h(g(x)) \quad \longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \left(\frac{1}{z}\right)'(g(x)) \cdot (\ln x)'$$

$$= \left[\frac{z(1)' - (1)(z)'}{z^2}\right]\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[\frac{z(0) - (1)(1)}{z^2}\right]\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{0 - 1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)(x^{-1})$$

$$= -\frac{x^{-1}}{(\ln x)^2}$$

QUESTÃO 03:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MAT I 2012

$h(z) = e^z$

$g(x) = x \ln a$

$f(a^x) = h(g(x))$

$f'(a^x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= e^z \ln a$

$= e^{x \ln a} \ln a$

$= a^x \ln a$

QUESTÃO 04:

$f(x) = \frac{1}{e^x} = (e^x)^{-1}$

$h(z) = e^z$

$g(x) = -x$

$f\left(\frac{1}{e^x}\right) = h(g(x))$

$f'\left(\frac{1}{e^x}\right) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= e^z (-1)$

$f'\left(\frac{1}{e^x}\right) = -e^{-x}$

$= -\frac{1}{e^x}$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MAT I 2012

QUESTÃO 05:

$$f(x) = g(u(x))$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u(x+\Delta x)) - g(u(x))}{\Delta x}$$

SENDO $h = u(x)$ TEMOS:

$$\Delta h = u(x+\Delta x) - u(x) \qquad (1)$$

NESSE CASO, Δh DEPENDE DE Δx E, ASSIM, QUANDO $\Delta x \to 0$, TEMOS $\Delta h \to 0$

COM UMA MANIPULAÇÃO MATEMÁTICA EM (1) OBTEMOS:

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta h$$

$$= h + \Delta h$$

FAZENDO

$$g(u(x)) = g(h)$$

$$g(u(x+\Delta x)) = g(h + \Delta h)$$

DESSA FORMA

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta x}$$

SUPONDO $\Delta u \neq 0$. LOGO,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

UMA VEZ QUE, QUANDO $\Delta x \to 0$, TEMOS $\Delta u \to 0$

OBTEMOS:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(u) \cdot u'(x)$$

$$= g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

QUESTÃO 06:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS I

MAT I 2012

P

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)'$$

$$= \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)'$$

$$= (u \cdot v^{-1})'$$

$$= u\,(v^{-1})' + v^{-1}\,u'$$

$$= u\,(-1v^{-2})(v') + v^{-1}\,u'$$

$$= u\left(-\frac{1}{v^2}\right)v' + \frac{1}{v}\,u'$$

$$= -\frac{uv'}{v^2} + \frac{u'}{v}$$

$$= \frac{-uv' + u'v}{v^2}$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

REGRA DA CADEIA

$$h(z) = z^{-1}$$

$$g(v) = v$$

$$w(v) = h(g(v))$$

$$w'(v) = [h(g(v))]'$$

$$= h'(g(v)) \cdot g'(v)$$

$$= -z^{-2}(v)'$$

$$= -v^{-2}v'$$

$$= -\frac{v'}{v^2}$$