Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Faculdade de Administração, Contabilidade, Economia, Turismo e Hotelaria
Departamento de Economia
Disciplina: Economia matemática I

Lista III

Prof. Silvio Tai
Abril 2012

Lista de Exercícios 3: Sistemas lineares e vetores

1) Resolva o seguinte sistema:

$$p_1 + 4p_2 + 17p_3 + 4p_4 = 38$$
$$2p_1 + 12p_2 + 46p_3 + 10p_4 = 98$$
$$3p_1 + 18p_2 + 69p_3 + 17p_4 = 153$$

2) Dados os vetores $\vec{u} = (2,-1,3)$ e $\vec{v} = (-2,1,2)$, determine o ângulo entre u e v.

3) Sejam os vetores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (1,1,1)$ e $\vec{w} = (a,b,c)$. Quais as condições (em função de a, b e c) para que o vetor $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$?

4) Seja $\vec{w}_1 = (1,2,3)$, $\vec{w}_2 = (4,5,6)$ e $\vec{w}_3 = (7,8,9)$, verifique se $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ e $\vec{w}_3$ são linearmente independentes.

5) Determine se $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ e $\vec{d}_3$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes.

6) (Ex. 11.9 do Simon and Blume) a) Expresse (2,2) como uma combinação linear de (1,2) e (1,4).
b) Expresse (1,2,3) como combinação linear de (1,1,0), (1,0,1) e (0,1,1)

LISTA DE EXERCÍCIOS III

MAT I 2012

1

QUESTÃO 01:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 & 4 \\ 2 & 12 & 46 & 10 \\ 3 & 18 & 69 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 98 \\ 153 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 17 & 4 & 38 \\ 2 & 12 & 46 & 10 & 98 \\ 3 & 18 & 69 & 17 & 153 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \times(-3) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 17 & 4 & 38 \\ 0 & 4 & 12 & 2 & 22 \\ 0 & 6 & 18 & 5 & 39 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(1/4) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 17 & 4 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 6 & 18 & 5 & 39 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \times(-4) \times(-6) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \times(1/2) \end{array} \sim$$

LISTA DE EXERCÍCIOS III

MAT I 2012

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ + \quad + \\ \times(-1/2) \quad \times(-2) \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\rho_4 = 3$

$\rho_3 = r$

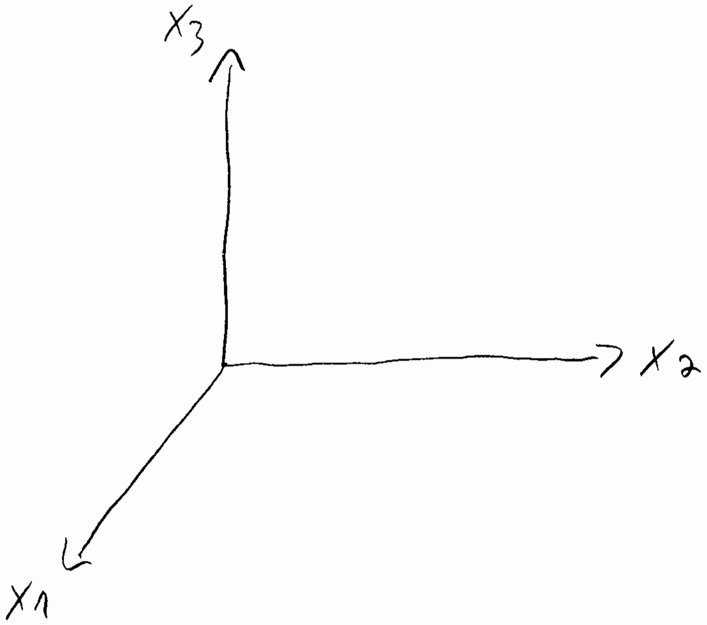
$\rho_2 = 4 - 3r$

$\rho_1 = 10 - 5r$

$r \Rightarrow$ UM NÚMERO REAL QUALQUER

O SISTEMA LINEAR POSSUI INFINITAS SOLUÇÕES.

QUESTÃO 02:



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 1 + 9}$$
$$= \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 1 + 4}$$
$$= \sqrt{9}$$
$$= 3$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [(2)(-2) + (-1)(1) + (3)(2)]$$
$$= (-4 - 1 + 6)$$
$$= 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$
$$1 = \sqrt{14}\,(3) \cos\theta$$
$$3\sqrt{14} \cos\theta = 1$$
$$\cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{14}} \rightarrow \theta = \arccos \frac{1}{3\sqrt{14}}$$

QUESTÃO 03:

$$\vec{u} = (1, 0, 1)$$
$$\vec{v} = (1, 1, 1)$$
$$\vec{w} = (a, b, c)$$

$$\vec{u} \perp \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

$$[(1)(a)+(0)(b)+(1)(c)]=0$$

$$(a+0+c)=0$$

$$a+c=0$$

$$a=-c \quad \text{ou} \quad c=-a$$

$\vec{v} \perp \vec{w}$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=0$$

$$[(1)(a)+(1)(b)+(1)(c)]=0$$

$$(a+b+c)=0$$

$$a=-b-c \quad \text{ou} \quad b=-a-c \quad \text{ou} \quad c=-a-b$$

QUESTÃO 04:

$$\vec{w}_1=(1,2,3)$$

$$\vec{w}_2=(4,5,6)$$

$$\vec{w}_3=(7,8,9)$$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1+4c_2+7c_3=0\\ 2c_1+5c_2+8c_3=0\\ 3c_1+6c_2+9c_3=0\end{cases}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS IV

MAT I 2022

$AX = B \Rightarrow AX = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-2)\ \times(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \times\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \times(-4)\ \times(6) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 - c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

O SISTEMA LINEAR POSSUI INFINITAS SOLUÇÕES.

NÃO, OS VETORES $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ E $\vec{w_3}$ SÃO LINEARMENTE DEPENDENTE, POIS A FORMA ESCALONADA POR LINHAS POSSUI UMA LINHA DE ZEROS CARACTERIZANDO QUE HÁ UMA COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE ESSES VETORES.

OBS: COMO A MATRIZ DE COEFICIENTES É UMA MATRIZ QUADRADA PODE-SE TAMBÉM UTILIZAR DE DETERMINANTES PARA IDENTIFICAR A DEPENDÊNCIA. NESSE CASO, QUANDO O DETERMINAN-

LISTA DE EXERCÍCIOS III

MAT I 2012

SE FOR IGUAL A ZERO OS VETORES SERÃO LINEARMENTE DEPENDENTES.

QUESTÃO 5:

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \; d_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; e \; d_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 0 \\ 0c_1 + c_2 + 0c_3 = 0 \\ 0c_1 + 0c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$AX = B \Rightarrow AX = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS III

MAT I 2022

OS VETORES $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ E $\vec{a_3}$ SÃO LINEARMENTE INDEPENDENTE, POIS ESSES VETORES FORMAM UMA MATRIZ IDENTIDADE 3x3, OU SEJA, NÃO HÁ NENHUMA LINHA COMPOSTA SOMENTE DE ZEROS, O QUE CARACTERIZARIA UMA COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE ESSES VETORES.

OBS: COMO A MATRIZ DE COEFICIENTES É UMA MATRIZ QUADRADA PODE-SE TAMBÉM UTILIZAR DE DETERMINANTES PARA IDENTIFICAR A DEPENDÊNCIA LINEAR. NESSE CASO, QUANDO O DETERMINANTE FOR DIFERENTE DE ZERO OS VETORES SERÃO LINEARMENTE INDEPENDENTES.

QUESTÃO 06:

6.A $AX = B \Rightarrow Ac = B$

$A_1 = (1, 2)$

$A_2 = (1, 4)$

$B = (2, 2)$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 & (-2) \\ 2c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cancel{2c_1} - 2c_2 = -4 \\ \cancel{2c_1} + 4c_2 = 2 \end{cases}$$

$$2c_2 = -2$$

$$c_2 = -1$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 - 1 = 2$$

$$c_1 = 2 + 1$$

$$= 3$$

LISTA DE EXERCÍCIOS III

MAT I 2022

$$3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

6.B $AX=B \Rightarrow Ac=B$

$A_1=(1,1,0)$

$A_2=(1,0,1)$

$A_3=(0,1,1)$

$B=(1,2,3)$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2+0c_3=1\\c_1+0c_2+c_3=2\\0c_1+c_2+c_3=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2=1 & \Rightarrow c_2=1-c_1\\c_1+c_3=2 & \Rightarrow c_3=2-c_1\\c_2+c_3=3\end{cases}$$

$c_2+c_3=3$

$1-c_1+2-c_1=3$

$-2c_1+3=3$

$-2c_1=3-3$

$-2c_1=0$

$\Rightarrow c_1=0$

LISTA DE EXERCÍCIOS III

MAT I 2012

$c_2 = 1 - c_1$
$= 1 - 0$
$= 1$

$c_3 = 2 - c_1$
$= 2 - 0$
$= 2$

$$0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$