

4
① PÁGINA 55 (CAPÍTULO 4)

$$Q_D - Q_S + 0P = 0$$

$$Q_D - 0Q_S + bP = a$$

$$0Q_D + Q_S - dP = -c$$

MATRIZ DE COEFICIENTES =

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

VECTOR DE CONSTANTES =

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -c \end{bmatrix}$$

② PÁGINA 56 (CAPÍTULO 5)

$$Q_{D1} - Q_{S1} + 0Q_{D2} + 0Q_{S2} + 0P_1 + 0P_2 = 0$$

$$Q_{D1} + 0Q_{S1} + 0Q_{D2} + 0Q_{S2} - a_1P_1 - a_2P_2 = a_0$$

$$0Q_{D1} + Q_{S1} + 0Q_{D2} + 0Q_{S2} - b_1P_1 - b_2P_2 = b_0$$

$$0Q_{D1} + 0Q_{S1} + Q_{D2} - Q_{S2} + 0P_1 + 0P_2 = 0$$

$$0Q_{D1} + 0Q_{S1} + Q_{D2} + 0Q_{S2} - \alpha_1P_1 - \alpha_2P_2 = \alpha_0$$

$$0Q_{D1} + 0Q_{S1} + 0Q_{D2} + Q_{S2} - \beta_1P_1 - \beta_2P_2 = \beta_0$$

$$\text{MATRIZ DE COEFICIENTES} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -q_1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{VETOR DAS VARIÁVEIS} = \begin{bmatrix} Q_{D1} & -Q_{S1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{D1} & 0 & 0 & 0 & -a_1 P_1 & -a_2 P_2 \\ 0 & Q_{S1} & 0 & 0 & -b_1 P_1 & -b_2 P_2 \\ 0 & 0 & Q_{D2} & -Q_{S2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{D2} & 0 & -q_1 P_1 & -q_2 P_2 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{S2} & -\beta_1 P_1 & -\beta_2 P_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{VETOR DAS CONSTANTES} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ b_0 \\ 0 \\ q_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

1A) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 3+0 & -7+8 \\ 6+3 & 9-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.B) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 C-A &= \begin{bmatrix} 7-3 & 3-(-7) \\ 6-6 & 1-9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 3+7 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1.C) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 3.A &= \begin{bmatrix} 3(3) & 3(-7) \\ 3(6) & 3(9) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & -21 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1.D) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 4.B + 2.C &= \begin{bmatrix} 4(0)+2(7) & 4(8)+2(3) \\ 4(3)+2(6) & 4(-2)+2(9) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0+14 & 32+6 \\ 12+12 & -8+2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 14 & 38 \\ 24 & -6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.A) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

SIM. A.B É DEFINIDO

$$A.B = \begin{bmatrix} 2(4)+1(3) & 2(0)+1(8) \\ 3(4)+0(3) & 3(0)+0(8) \\ 5(4)+1(3) & 5(0)+1(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+3 & 0+8 \\ 12+0 & 0+0 \\ 20+3 & 0+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 12 & 0 \\ 23 & 8 \end{bmatrix}$$

NÃO SE PODE CALCULAR $B.A$. PORQUE O NÚMERO DE COLUNAS DA MATRIZ B É DIFERENTE DO NÚMERO DE LINHAS DA MATRIZ A .

2.B) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

SIM, $B.C$ É DEFINIDO.

$$\begin{aligned} B.C &= \begin{bmatrix} 5(1)+0(6) & 5(2)+0(3) \\ 3(1)+8(6) & 3(2)+8(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5+0 & 8+0 \\ 3+48 & 6+24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 51 & 30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

SIM, $C.B$ É DEFINIDO.

$$\begin{aligned} C.B &= \begin{bmatrix} 1(1)+2(3) & 1(0)+2(8) \\ 6(1)+3(3) & 6(0)+3(8) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+6 & 0+16 \\ 24+9 & 0+24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 33 & 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

NÃO, $B.C$ É DIFERENTE DE $C.B$.

3) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

SIM, $B.A$ É DEFINIDO

$$\begin{aligned}
 B \cdot A &= \begin{bmatrix} 3(0) + (-1)(-1) + 2(0) & 3(-\frac{1}{5}) + (-1)(\frac{1}{5}) + 2(\frac{2}{5}) & 3(\frac{3}{10}) + (-1)(\frac{7}{10}) + 2(-\frac{1}{10}) \\ 1(0) + 0(-1) + 3(0) & 1(-\frac{1}{5}) + 0(\frac{1}{5}) + 3(\frac{2}{5}) & 1(\frac{3}{10}) + 0(\frac{7}{10}) + 3(-\frac{1}{10}) \\ 4(0) + 0(-1) + 2(0) & 4(-\frac{1}{5}) + 0(\frac{1}{5}) + 2(\frac{2}{5}) & 4(\frac{3}{10}) + 0(\frac{7}{10}) + 2(-\frac{1}{10}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0+1+0 & -3/5 - 1/5 + 4/5 & 9/10 - 7/10 - 2/10 \\ 0+0+0 & -1/5 + 0 + 6/5 & 3/10 + 0 - 3/10 \\ 0+0+0 & -4/5 + 0 + 4/5 & 12/10 + 0 - 2/10 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sim, $A \cdot B = B \cdot A$.

4.A PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} &= \begin{bmatrix} 9(2) + 7(0) + 0(3) & 9(0) + 7(1) + 0(5) \\ 3(2) + 0(0) + 4(3) & 3(0) + 0(1) + 4(5) \\ 2(2) + 3(0) + 0(3) & 2(0) + 3(1) + 0(5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 18 + 0 + 0 & 0 + 7 + 0 \\ 6 + 0 + 12 & 0 + 0 + 20 \\ 4 + 0 + 0 & 0 + 3 + 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 18 & 20 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}
 \end{aligned}$$

4.B PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} &= \begin{bmatrix} 4(4) + 5(5) + 0(0) & 4(-1) + 5(2) + 0(1) \\ 3(4) + 0(5) + 1(0) & 3(-1) + 0(2) + 1(1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 16 + 25 + 0 & -4 + 10 + 0 \\ 12 + 0 + 0 & -3 + 0 + 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 41 & 6 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

4.C) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 3(x) + 6(y) + 0(z) \\ 4(x) + 2(y) + (-7)(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x + 6y + 0z \\ 4x + 2y - 7z \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

4.D) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{bmatrix} -9 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \times \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -9(7) + 5(0) + 1(1) & -9(0) + 5(2) + 1(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -63 + 0 + 1 & 0 + 10 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -62 & 14 \end{bmatrix}_{1 \times 2}$$

5.A) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\sum_{j=2}^5 x_j = x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

j=2

5.B) PÁGINA 62 (CAPÍTULO 4)

$$\sum_{j=5}^8 a_j x_j = a_5 x_5 + a_6 x_6 + a_7 x_7 + a_8 x_8$$

j=5

5.C PÁGINA 62 (CAPÍTULO 5)

$$\sum_{i=1}^4 b x_i = b x_1 + b x_2 + b x_3 + b x_4$$

5.D PÁGINA 62 (CAPÍTULO 5)

$$\sum_{i=1}^m a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_m x^{m-1}$$

5.E PÁGINA 62 (CAPÍTULO 5)

$$\sum_{i=0}^3 (x+i)^2 = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$$

6.A PÁGINA 63 (CAPÍTULO 5)

$$x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) + x_3(x_3-1) = \sum_{i=1}^3 x_i(x_i-1)$$

6.B PÁGINA 63 (CAPÍTULO 5)

$$a_2(x_3+2) + a_3(x_4+3) + a_4(x_5+4) = \sum_{i=2}^4 a_i(x_{i+1}+i)$$

6.C PÁGINA 63 (CAPÍTULO 5)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^m} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{x^i}$$

6.D PÁGINA 63 (CAPÍTULO 4)

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^m} = \sum_{i=0}^m \frac{1}{x^i}$$

7.A PÁGINA 63 (CAPÍTULO 4)

$$\sum_{i=0}^{m+1} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^m x_i \right) + x_{m+1}$$

7.B PÁGINA 63 (CAPÍTULO 4)

$$a \sum_{j=1}^m b_j y_j = a (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m)$$

$$= a b_1 y_1 + a b_2 y_2 + \dots + a b_m y_m$$

$$= \sum_{j=1}^m a b_j y_j$$

7.C PÁGINA 63 (CAPÍTULO 4)

$$\sum_{j=1}^m x_j + \sum_{j=1}^m y_j = x_1 + x_2 + \dots + x_m + y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

$$= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_m + y_m$$

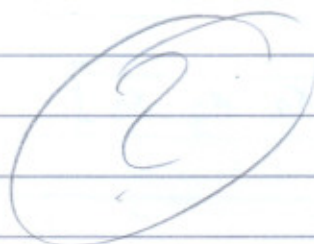
$$= \sum_{j=1}^m (x_j + y_j)$$

7.A PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)

$$\text{CUSTO} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot Q_i$$

1.B) PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$\text{CUSTO} = P \cdot Q'$$



2) PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$M = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.A) PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$M M' = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(5) & 5(19) \\ 6(5) & 6(19) \\ 2(5) & 2(19) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 95 \\ 30 & 114 \\ 10 & 38 \end{bmatrix}$$

2.B) PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$M W' = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(7) & 5(4) & 5(8) \\ 6(7) & 6(4) & 6(8) \\ 2(7) & 2(4) & 2(8) \end{bmatrix}$$

1351

$$M W' = \begin{bmatrix} 33 & 20 & 50 \\ 52 & 25 & 48 \\ 15 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

2.C PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$X X' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1(x_1) & x_1(x_2) & x_1(x_3) \\ x_2(x_1) & x_2(x_2) & x_2(x_3) \\ x_3(x_1) & x_3(x_2) & x_3(x_3) \end{bmatrix}$$

$$X X' = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

2.D PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$M' M = \begin{bmatrix} 3 & 19 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

PRODUTO NÃO DEFINIDO

2.E PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$M' M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix}$$

PRODUTO NÃO DEFINIDO

2.F PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 w'x &= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
 &= [7(x_1) + 5(x_2) + 8x_3] \\
 &= [7x_1 + 5x_2 + 8x_3]
 \end{aligned}$$

2.6 PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 u'u &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} & u'u &= \sum_{j=1}^m u_j^2 \\
 &= [3(3) + 6(6) + 2(2)] \\
 &= [25 + 36 + 4] \\
 &= [65]
 \end{aligned}$$

2.4 PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 x'x &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & x'x &= \sum_{j=1}^m x_j^2 \\
 &= [x_1(x_1) + x_2(x_2) + x_3(x_3)] \\
 &= [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]
 \end{aligned}$$

3.A PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$xy', y'y, zz', zw',$$

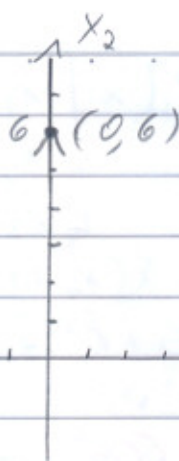
3.B PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$x'x, y'y, z'z, x'y, x'z, y'x, y'z, z'x, z'y, wx', wy', wz'$$

4.A PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)

$$2M = \begin{bmatrix} 2(0) \\ 2(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

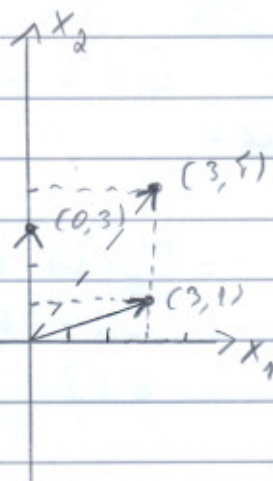


4.B PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)

$$M + M = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+0 \\ 1+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

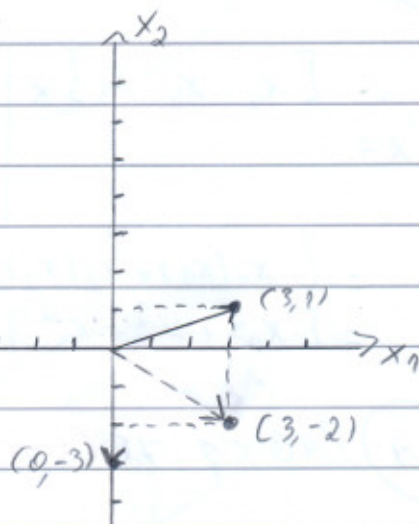


4.C PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)

$$M - M = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-0 \\ 1-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

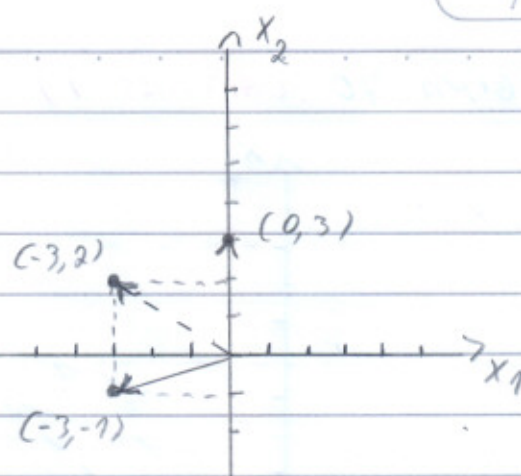


4.D PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)

$$M - M = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M - N = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

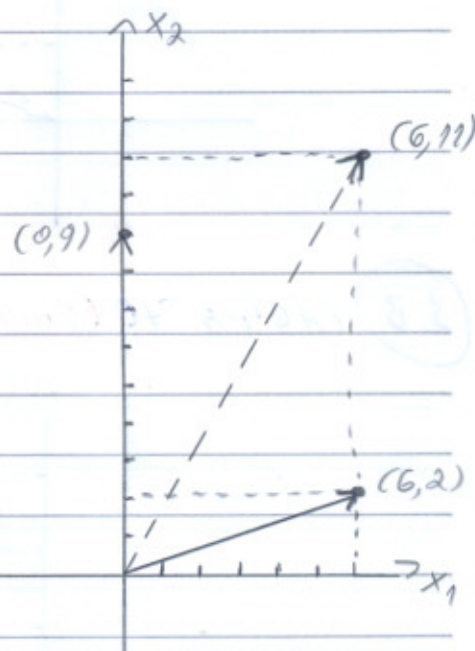


4.E PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

$$2M + 3N = \begin{bmatrix} 2(3) \\ 2(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3(0) \\ 3(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 + 0 \\ 2 + 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

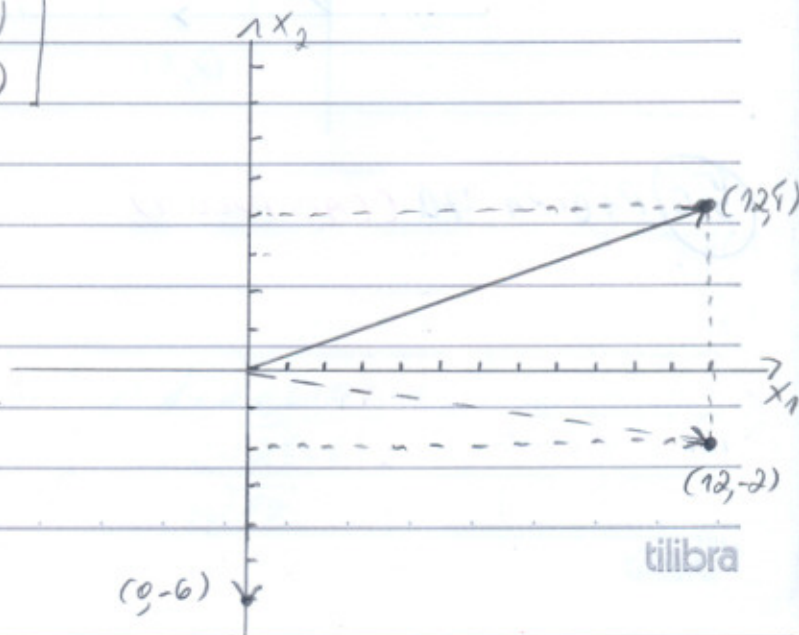


4.F PÁGINA 70 (CAPÍTULO 4)

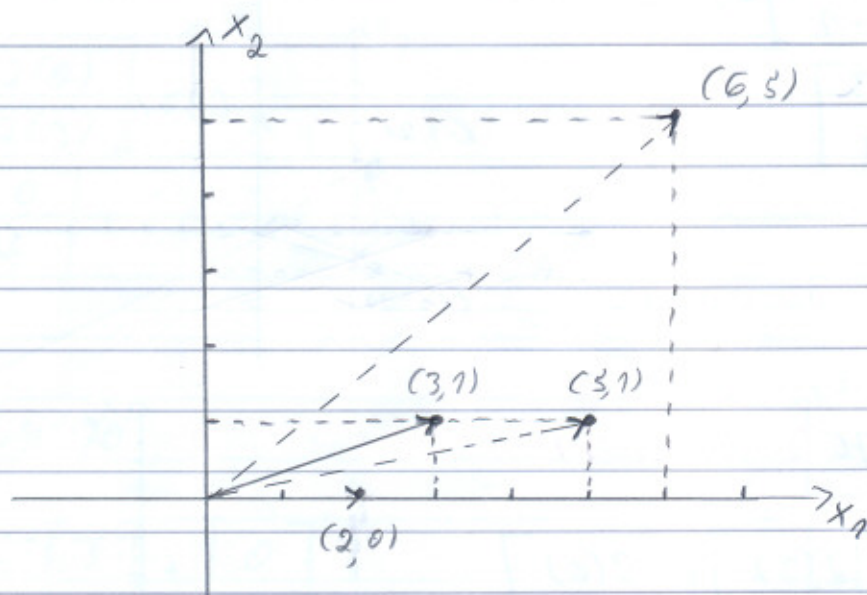
$$4M - 2N = \begin{bmatrix} 4(3) \\ 4(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(0) \\ 2(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 - 0 \\ 4 - 6 \end{bmatrix}$$

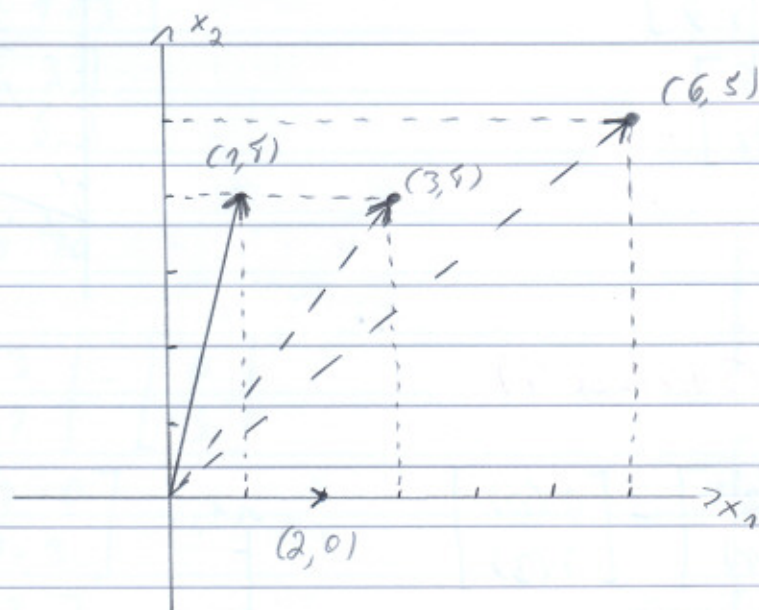
$$= \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$



5.A PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)



5.B PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)



5.C PÁGINA 70 (CAPÍTULO 5)

6.A) PÁGINA 71 (CAPÍTULO 5)

$$e_1 + 7e_2 + 0e_3$$

6.B) PÁGINA 71 (CAPÍTULO 5)

$$5e_1 - 2e_2 + e_3$$

6.C) PÁGINA 71 (CAPÍTULO 5)

$$-e_1 + 3e_2 + 9e_3$$

6.D) PÁGINA 71 (CAPÍTULO 5)

$$2e_1 + 0e_2 + 8e_3$$

7.A) PÁGINA 71 (CAPÍTULO 5)

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \\ &= \sqrt{(3 - 0)^2 + [2 - (-1)]^2 + (5 - 5)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (2+1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9 + 3^2 + 1} \\ &= \sqrt{10 + 9} \\ &= \sqrt{19} \end{aligned}$$

7.B) PÁGINA 71 (CAPÍTULO 5)

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \\ &= \sqrt{(7 - 2)^2 + (0 - 0)^2 + [5 - (-4)]^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 0^2 + (5+4)^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} d &= \sqrt{25 + 0 + (8)^2} \\ &= \sqrt{25 + 64} \\ &= \sqrt{89} \end{aligned}$$

8) PÁGINA 77 (CAPÍTULO 4)

NA CIRCUNSTÂNCIA DE QUE A DISTÂNCIA ENTRE M E N NÃO É, NUNCA, MAIOR DO QUE A DISTÂNCIA DE M A W MAIS A DISTÂNCIA DE M A N .

9.A) PÁGINA 77 (CAPÍTULO 4)

9.B) PÁGINA 77 (CAPÍTULO 4)

9.C) PÁGINA 77 (CAPÍTULO 4)

1.A) PÁGINA 73 (CAPÍTULO 4)

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$\begin{bmatrix} 3+(-1) & 6+7 \\ 7+8 & 0+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1+5 & 7+4 \\ 8+1 & 5+9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+5 & 13+4 \\ 15+1 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & 6+11 \\ 7+9 & 0+13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 17 \\ 16 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 17 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

1.B) PÁGINA 73 (CAPÍTULO 4)

$$(A+B)-C = A+(B-C)$$

$$\begin{bmatrix} 3+(-1) & 6+7 \\ 7+8 & 0+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1-5 & 7-4 \\ 8-1 & 4-9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 13-4 \\ 15-1 & 4-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-6) & 6+3 \\ 7+7 & 0+(-5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 14 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

2) PÁGINA 73 (CAPÍTULO 4)

$$\text{NÃO. } A-B = -(B-A)$$

3) PÁGINA 73 (CAPÍTULO 4)

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\begin{bmatrix} 5(-8)+3(1) & 5(0)+3(3) & 5(7)+3(2) \\ 0(-8)+5(1) & 0(0)+5(3) & 0(7)+5(2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -8(1)+0(0)+7(7) & -8(0)+0(3)+7(1) \\ 1(1)+3(0)+2(7) & 1(0)+3(3)+2(1) \end{bmatrix}$$

121

$$\begin{bmatrix} -50+3 & 0+9 & 35+6 \\ 0+5 & 0+15 & 0+10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -8+0+59 & 0+0+7 \\ 1+0+14 & 0+9+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -37 & 9 & 41 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 51 & 7 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -37(1)+9(0)+41(7) & -37(0)+9(3)+41(1) \\ 5(1)+15(0)+10(7) & 5(0)+15(3)+10(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(51)+3(15) & 5(7)+3(11) \\ 0(51)+5(15) & 0(7)+5(11) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -37+0+287 & 0+27+41 \\ 5+0+70 & 0+45+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250+45 & 35+33 \\ 0+75 & 0+55 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{bmatrix}$$

4.A PÁGINA 75 (CAPÍTULO 4)

$$K(a_{ij} + b_{ij}) = Ka_{ij} + Kb_{ij} \\ = KA + KB$$

4.B PÁGINA 75 (CAPÍTULO 4)

$$(j+k)A = (j+k)a_{ij} \\ = ja_{ij} + ka_{ij} \\ = jA + kA$$

5 PÁGINA 75 (CAPÍTULO 4)

6) PÁGINA 74 (CAPÍTULO 4)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + x_2 \\ x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(Ax) &= [x_1 \ x_2]_{1 \times 2} \times \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + x_2 \\ x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\ &= [a_{11}x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + a_{22}x_2^2]_{1 \times 1} \\ &= [a_{11}x_1^2 + 2x_1x_2 + a_{22}x_2^2]_{1 \times 1} \end{aligned}$$

NÃO É UMA SOMA PONDERADA DE QUADRADOS. SIM, A LEI ASSOCIATIVA CONTINUA SENDO APLICÁVEL.

1.A) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned} AI &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \\ &= \begin{bmatrix} -1(1) + 3(0) + 1(0) & -1(0) + 3(1) + 1(0) & -1(0) + 3(0) + 1(1) \\ 0(1) + (-2)(0) + 4(0) & 0(0) + (-2)(1) + 4(0) & 0(0) + (-2)(0) + 4(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 0 + 0 & 0 + 3 + 0 & 0 + 0 + 1 \\ 0 + 0 + 0 & 0 - 2 + 0 & 0 + 0 + 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \end{aligned}$$

1.B) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 IA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\
 &= \begin{bmatrix} 1(-1) + 0(0) & 1(3) + 0(-2) & 1(1) + 0(4) \\ 0(-1) + 1(0) & 0(3) + 1(-2) & 0(1) + 1(4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 + 0 & 3 + 0 & 1 + 0 \\ 0 + 0 & 0 - 2 & 0 + 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}
 \end{aligned}$$

1.C) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 IX &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1(x_1) + 0(x_2) \\ 0(x_1) + 1(x_2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 + 0 \\ 0 + x_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}
 \end{aligned}$$

1.D) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 X'I &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1(1) + x_2(0) & x_1(0) + x_2(1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 + 0 & 0 + x_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2}
 \end{aligned}$$

2.A PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1(7) + 3(6) + 1(0) \\ 0(7) + (-2)(6) + 4(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 + 18 + 0 \\ 0 - 12 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ -12 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

2.B PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$A_{2 \times 3} \cdot I_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$$

$$AI = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} -1(1) + 3(0) + 1(0) & -1(0) + 3(1) + 1(0) & -1(0) + 3(0) + 1(1) \\ 0(1) + (-2)(0) + 4(0) & 0(0) + (-2)(1) + 4(0) & 0(0) + (-2)(0) + 4(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + 0 + 0 & 0 + 3 + 0 & 0 + 0 + 1 \\ 0 + 0 + 0 & 0 - 2 + 0 & 0 + 0 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$(AI)B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \rightarrow (AI)B = \begin{bmatrix} 11 \\ -12 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1(7) + 3(6) + 1(0) \\ 0(7) + (-2)(6) + 4(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 + 18 + 0 \\ 0 - 12 + 0 \end{bmatrix}$$

2.C PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 X'I &= [x_1 \ x_2]_{1 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= [x_1(1) + x_2(0) \quad x_1(0) + x_2(1)] \\
 &= [x_1 + 0 \quad 0 + x_2] \\
 &= [x_1 \ x_2]_{1 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (X'I)A &= [x_1 \ x_2]_{1 \times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\
 &= [x_1(-1) + x_2(0) \quad x_1(3) + x_2(-2) \quad x_1(1) + x_2(5)] \\
 &= [-x_1 + 0 \quad 3x_1 - 2x_2 \quad x_1 + 5x_2] \\
 &= [-x_1 \quad 3x_1 - 2x_2 \quad x_1 + 5x_2]_{1 \times 3}
 \end{aligned}$$

2.D PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$\begin{aligned}
 X'A &= [x_1 \ x_2]_{1 \times 2} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\
 &= [x_1(-1) + x_2(0) \quad x_1(3) + x_2(-2) \quad x_1(1) + x_2(5)] \\
 &= [-x_1 + 0 \quad 3x_1 - 2x_2 \quad x_1 + 5x_2] \\
 &= [-x_1 \quad 3x_1 - 2x_2 \quad x_1 + 5x_2]_{1 \times 3}
 \end{aligned}$$

NÃO, O RESULTADO DE 'A' NÃO É AFETADO PELA INSERÇÃO DE 'I' EM 'B'.

NÃO, A ELIMINAÇÃO DE 'I' EM 'D' NÃO AFETA O RESULTADO EM 'C'.

3.A PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$0_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = 0_{3 \times 3}$$

3.B) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$A_{2 \times 3} \cdot O_{3 \times 5} = O_{2 \times 5}$$

3.C) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$O_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = O_{3 \times 1}$$

3.D) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

$$X_{2 \times 1} \cdot O_{1 \times 3} = O_{2 \times 3}$$

4) PÁGINA 76 (CAPÍTULO 4)

UMA MATRIZ É IDEMPOTENTE SE E SOMENTE SE QUANDO É MULTIPLICADO POR SI PRÓPRIA QUALQUER NÚMERO DE VEZES PERMANECENDO A MESMA. ENTÃO:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} &= \begin{bmatrix} 0(0)+0(0) & 0(0)+0(0) \\ 0(0)+0(0) & 0(0)+0(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} &= \begin{bmatrix} 1(1)+0(0) & 1(0)+0(1) \\ 0(1)+1(0) & 0(0)+1(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

1481

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} &= \begin{bmatrix} 2(2)+0(0) & 2(0)+0(2) \\ 0(2)+2(0) & 0(0)+2(2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

INFINITAS MATRIZES NUMÉRICAS DIAGONAIS E IDEMPOTENTES, DE DIMENSÃO $n \times n$, PODEM SER CONSTRUÍDAS.

2.A PÁGINA 81 (CAPÍTULO 4)

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.B PÁGINA 81 (CAPÍTULO 4)

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

1.C PÁGINA 81 (CAPÍTULO 4)

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.A PÁGINA 81 (CAPÍTULO 4)

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$\begin{aligned}
 A+B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+3 & 4+7 \\ -1+0 & 5+4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$(A+B)' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A'+B' &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+3 & -1+0 \\ 4+7 & 5+4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{LOGO: } (A+B)' = A' + B'$$

(2.B) PÁGINA 87 (CAPÍTULO 4)

$$(AC)' = C'A'$$

$$\begin{aligned}
 AC &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \\
 &= \begin{bmatrix} 2(1)+4(0) & 2(2)+4(1) & 2(3)+4(1) \\ -1(1)+5(0) & -1(2)+5(1) & -1(3)+5(1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2+0 & 4+4 & 6+4 \\ -1+0 & -2+5 & -3+5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}
 \end{aligned}$$

$$(AC)' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C'A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+0(1) & 1(-1)+0(5) \\ 2(2)+1(1) & 2(-1)+1(5) \\ 3(2)+1(1) & 3(-1)+1(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & -1+0 \\ 4+1 & -2+5 \\ 6+1 & -3+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

LOGO: $(AC)' = C'A'$.

3) PÁGINA 81 (CAPÍTULO 4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D \equiv AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow D \equiv AB = \begin{bmatrix} 6 & 30 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ &= \begin{bmatrix} 2(3)+1(0) & 2(7)+1(1) \\ -1(3)+5(0) & -1(7)+5(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+0 & 14+1 \\ -3+0 & -7+5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DC &= \begin{bmatrix} 6 & 30 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} 6(2) + 30(0) & 6(6) + 30(3) \\ -3(2) + 13(0) & -3(6) + 13(3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 12 + 0 & 36 + 90 \\ -6 + 0 & -18 + 39 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 12 & 126 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ENTÃO: } ABC = \begin{bmatrix} 12 & 126 \\ -6 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{LOGO: } (ABC)' = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 126 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{aligned}
 E = C'B' &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} 2(3) + 0(7) & 2(0) + 0(4) \\ 6(3) + 3(7) & 6(0) + 3(4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 + 0 & 0 + 0 \\ 18 + 21 & 0 + 12 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 39 & 12 \end{bmatrix}_{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 EA' &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 39 & 12 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} 6(2) + 0(4) & 6(-1) + 0(5) \\ 39(2) + 12(4) & 39(-1) + 12(5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 12 + 0 & -6 + 0 \\ 78 + 48 & -39 + 60 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 126 & 21 \end{bmatrix}_{2 \times 2}
 \end{aligned}$$

$$\text{LOGO: } (ABC)' = C'B'A'$$