

EXERCÍCIO 1:

(1.1) $f(x, y) = y^2 + xy$ $(2, 1)$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \\ 2y + x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2(1) + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y + x$$

(1.3) $g(x, y, z) = xe^{xy} - z^2$

$(0, 0, 1)$

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \partial g / \partial x \\ \partial g / \partial y \\ \partial g / \partial z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{xy}(xy + 1) \\ x^2 e^{xy} \\ -2z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{(0)(0)}[(0)(0) + 1] \\ (0)^2(e^{(0)(0)}) \\ -2(1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} = x(e^{xy})' + e^{xy}(x)'$$

$$= xe^{xy}(xy)' + e^{xy}(1)$$

$$= xy e^{xy} + e^{xy}$$

$$= e^{xy}(xy + 1)$$

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} = x(e^{xy})' + e^{xy}(x)'$$

$$= xe^{xy}(xy)' + e^{xy}(0)$$

$$= x^2 e^{xy} + 0$$

$$= x^2 e^{xy}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} e^0(0+1) \\ (0)(e^0) \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1) \\ (0)(1) \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = -2z$$

1.1

EXERCÍCIO 2:

2.1 $f(x, y) = 2x + y - 1$ $(2, 1)$ $\mu = (1, 1)$

$$\mu = \frac{1}{\|\mu\|} \mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} (1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1}} (1, 1)$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

2.2 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ $(0, 0, 0)$ $\mu = (1, 1, 1)$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial f(x, y) / \partial x \\ \partial f(x, y) / \partial y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f'_{\mu}(2, 1) = \frac{1}{\|\mu\|} \cdot \nabla f \cdot \mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f'_u(2,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [2(1) + (1)(1)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (2+1)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

2.3 $g(x, y, z) = x e^{xy} - xy - z^2$ $(0, 1, 1)$ $u = (1, 1, 1)$

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} = x(e^{xy})' + e^{xy}(x)' - y$$

∂x

$$= x e^{xy} (xy)' + e^{xy} (1) - y$$

$$= x e^{xy} (y) + e^{xy} - y$$

$$= x y e^{xy} + e^{xy} - y$$

$$= e^{xy} (x + 1) - y$$

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} = x(e^{xy})' + e^{xy}(x)' - x$$

∂y

$$= x e^{xy} (xy)' + e^{xy} (0) - x$$

$$= x e^{xy} (x) + 0 - x$$

$$= x^2 e^{xy} - x$$

$$= x(e^{xy} - 1)$$

$$\frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} = -2z$$

∂z

$$\mu = \frac{1}{\|\mu\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} (1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} (1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$f'_\mu(0, 1, 1) = \frac{1}{\|\mu\|} \cdot \nabla f \cdot \mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (0 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [(0)(1) + (0)(1) - 2(1)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (0 + 0 - 2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (-2)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{= \frac{-2\sqrt{3}}{3}}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2f(x, y, z)/2x \\ 2f(x, y, z)/2y \\ 2f(x, y, z)/2z \end{bmatrix}$$

(2.9)

$$= \begin{bmatrix} e^{xy}(x+y)-y \\ x(e^{xy}-1) \\ -2z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{(0)(1)}(0+1)-1 \\ 0(e^{(0)(1)}-1) \\ -2(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^0(1)-1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)-1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exercício 3:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= xy [\ln(x^2+y^2+z^2)]' + \ln(x^2+y^2+z^2)(xy)' \\ &= xy \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x + \ln(x^2+y^2+z^2)(y) \\ &= y \ln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= xy [\ln(x^2+y^2+z^2)]' + \ln(x^2+y^2+z^2)(xy)' \\ &= xy \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y + \ln(x^2+y^2+z^2)(x) \\ &= x \ln(x^2+y^2+z^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= xy [\ln(x^2+y^2+z^2)]' + \ln(x^2+y^2+z^2)(xy)' \\ &= xy \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z + \ln(x^2+y^2+z^2)(0) \\ &= \frac{2xyz}{x^2+y^2+z^2} + 0 \\ &= \frac{2xyz}{x^2+y^2+z^2}\end{aligned}$$

NO PONTO (1, 1, 1) TEM-SE QUE:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= (1) \ln[(1)^2+(1)^2+(1)^2] + \frac{2(1)^2(1)}{(1)^2+(1)^2+(1)^2} \\ &= \ln(1+1+1) + \frac{2(1)(1)}{1+1+1}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \ln 3 + \frac{2}{3}$$

(3.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= (1) \ln[(1)^2 + (1)^2 + (1)^2] + \frac{2(1)(1)^2}{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} \\ &= \ln(1+1+1) + \frac{2(1)(1)}{1+1+1} \\ &= \ln 3 + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{2(1)(1)(1)}{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} \\ &= \frac{2}{1+1+1} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \begin{bmatrix} \partial f(x,y,z) / \partial x \\ \partial f(x,y,z) / \partial y \\ \partial f(x,y,z) / \partial z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \ln 3 + 2/3 \\ \ln 3 + 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

CALCULANDO O VETOR EM FORMATO PELOS PONTOS $p = (3, 2, 1)$ A

$q = (-1, 1, 2)$:

$$\begin{aligned}r &= q - p \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad r = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{1}{\| \nabla f \|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} (-4, -1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16+1+1}} (-4, -1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}} (-4, -1, 1)$$

$$\mu = \left(\frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}} \right)$$

$$f'_{\mu}(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \nabla f \cdot \mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}} (\ln 3 + 2/3 \quad \ln 3 + 2/3 \quad 2/3) \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}} (-4 \ln 3 - 8/3 - \ln 3 - 2/3 + 2/3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}} (-5 \ln 3 - 8/3)$$

$$= \frac{-5 \ln 3 - 8/3}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{-15 \ln 3 - 8}{3 \sqrt{2(3)^2}}$$

$$= \frac{-15 \ln 3 - 8}{3 \sqrt{2}}$$

$$f'_{\mu}(1, 1, 1) = \frac{-15 \ln 3 - 8}{3} \left(\frac{1}{3 \sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{-15 \ln 3 - 8}{9 \sqrt{2}}$$

A DERIVADA DIRECIONAL DE MÁXIMO CRESCIMENTO DE f NO PUNTO $(1, 1, 1)$ SEJA O VETOR ∇f DADO POR:

4.A

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \ln 3 + 2/3 \\ \ln 3 + 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

POIS PELA PROPRIEDADE DO PRODUTO ESCALAR A DERIVADA DE f NA DIREÇÃO μ É:

$$\nabla f(x^*), \mu = \|\nabla f(x^*)\| \|\mu\| \cos \theta = \|\nabla f(x^*)\| \cos \theta$$

UMA VEZ QUE $\|\mu\| = 1$, EM QUE θ É O ÂNGULO ENTRE OS VETORES $\nabla f(x^*)$ E μ NO PONTO BASE x^* .

COMO $\cos \theta$ VARIA ENTRE -1 E 1 , IMPLICA QUE O $\nabla f(x^*), \mu$ DEPENDE OS VETORES μ DE TAMANHO UNITÁRIO OCORRE QUANDO $\cos \theta = 1$, OU SEJA, QUANDO $\theta = 0^\circ$. LOGO, O $\nabla f(x^*), \mu$ SEJA O MAIOR QUANDO μ APONTA NA MESMA DIREÇÃO E SENTIDO DE $\nabla f(x^*)$.

EXERCÍCIO 4:

$$p = (0, 0)$$

$$q = (1, 3)$$

ENCONTRANDO O VETOR μ :

$$\mu = q - p$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ENCONTRANDO O VETOR UNITÁRIO μ :

$$\mu = \frac{1}{\|\mu\|} \mu$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} (1, 3) \therefore u = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$f'_u = \nabla f \cdot u$$

$$f''_u u = \nabla f \cdot u u$$

$$f''_u u = \nabla f \cdot \|u\|^2$$

$$4 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = \nabla f (1)^2$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{12}{\sqrt{10}} \right) = \nabla f$$

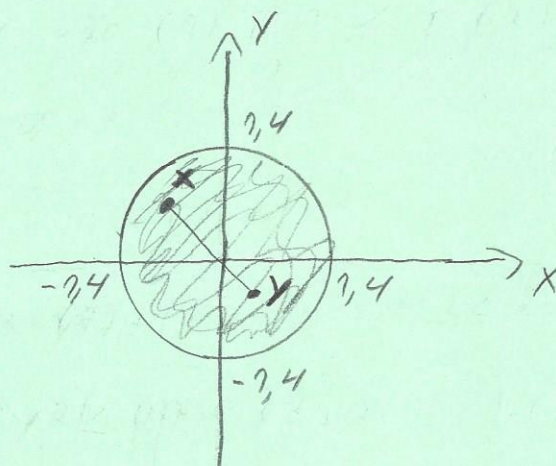
$$\nabla f = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, \frac{6\sqrt{10}}{5} \right)$$

EXERCÍCIO 5:

(5.A) $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}$

$$x^2 < 2 - y^2 \text{ para } y=0 \quad x < \pm 1,4$$

$$y^2 < 2 - x^2 \text{ para } x=0 \quad y < \pm 1,4$$



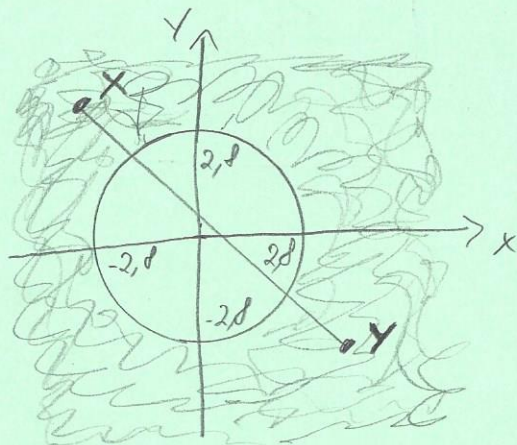
SEMDO ASSIM, ESSE CONJUNTO É CONVEXO, POIS DADO QUALQUER DOIS PONTOS x E y O SEGMENTO DE RETA FECHADO LIGANDO x A y TAMBÉM ESTARÁ NESTE CONJUNTO.

(5.3) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 8\}$

(5.9)

$x^2 > 8 - y^2$ PARA $y=0$ $x > \pm 2,8$

$y^2 > 8 - x^2$ PARA $x=0$ $y > \pm 2,8$

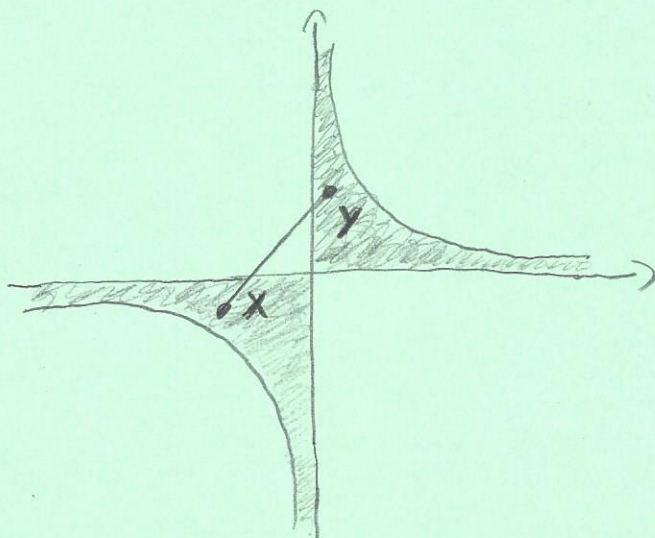


SEMDO ASSIM, ESSE CONJUNTO NÃO É CONVEEXO, POIS DADO QUALQUER DOIS PONTOS X E Y O SEGMENTO DE RETA FECHADO LIGANDO X A Y NEM SEMPRE PERTENCEM TAMBÉM AO CONJUNTO.

(5.4) $\{(x, y) : xy \leq 1\}$

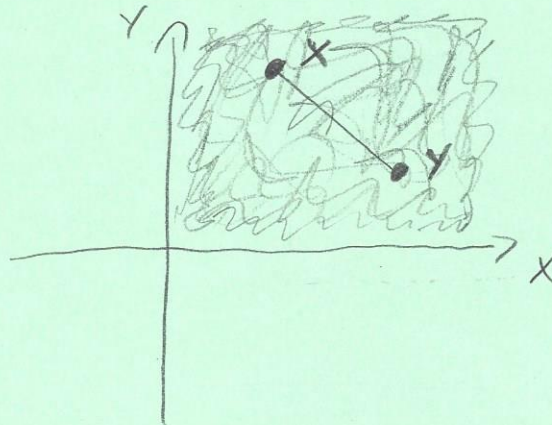
$x \leq \frac{1}{y}$

$y \leq \frac{1}{x}$



SEMDO ASSIM, ESSE CONJUNTO NÃO É CONVEEXO, POIS DADO QUALQUER DOIS PONTOS X E Y O SEGMENTO DE RETA FECHADO LIGANDO X A Y NEM SEMPRE PERTENCEM TAMBÉM A ESSE CONJUNTO.

5.D ~~Seja o conjunto~~ $S(x, y): x \geq 0, y \geq 0$



SEMO ASSIM, ESSE CONJUNTO É CONVEXO, POIS DADO QUALQUER DOIS PONTOS x E y O SEGMENTO DE RETA FECHADO LIGANDO x A y TAMBÉM ESTARÁ NESSE CONJUNTO.

EXERCÍCIO 6:

6.A $z = x + y - e^x - e^{x+y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1 - (e^x)' - (e^{x+y})' \\ &= 1 - e^x(x)' - e^{x+y}(x+y)' \\ &= 1 - e^x - e^{x+y}(1) \\ &= 1 - e^x - e^{x+y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 1 - (e^x)' - (e^{x+y})' \\ &= 1 - e^x(x)' - e^{x+y}(x+y)' \\ &= 1 - e^x(0) - e^{x+y}(1) \\ &= 1 - e^{x+y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -(e^x)' - (e^{x+y})' \\ &= -e^x(x)' - e^{x+y}(x+y)' \\ &= -e^x - e^{x+y}(1) \\ &= -e^x - e^{x+y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -(e^x)' - (e^{x+y})' \\ &= -e^x(x)' - e^{x+y}(x+y)' \\ &= -e^x(0) - e^{x+y}(1) \\ &= -e^{x+y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -(e^{x+y})' \\ &= -e^{x+y}(x+y) \\ &= -e^{x+y}(1) \\ &= -e^{x+y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -(e^{x+y})' \\ &= -e^{x+y}(x+y)' \\ &= -e^{x+y}(1) \\ &= -e^{x+y}\end{aligned}$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$\begin{aligned}H &= \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^x - e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & -e^{x+y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

CALCULANDO OS MEMBROS PRINCIPAIS LÍNEARES

$$\begin{aligned}|H_1| &= |-e^x - e^{x+y}| & e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &= -e^x - e^{x+y} < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|H_2| &= \begin{vmatrix} -e^x - e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & -e^{x+y} \end{vmatrix} \\ &= (-e^x - e^{x+y})(-e^{x+y}) - (-e^{x+y})(-e^{x+y}) \\ &= e^{2x+y} + e^{2x+2y} - (e^{2x+2y}) \\ &= e^{2x+y} + \cancel{e^{2x+2y}} - \cancel{e^{2x+2y}} \\ &= e^{2x+y} > 0\end{aligned}$$

$$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

UMA VEZ QUE $f''_{11} < 0$ E $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$ IMPLICA QUE Z É UMA FUNÇÃO ESTRICTAMENTE CONCAVA DE X E Y.

(6.3) $z = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{1}{2}y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (e^{x+y})' + (e^{x-y})' \\ &= e^{x+y}(x+y)' + e^{x-y}(x-y)' \\ &= e^{x+y}(1) + e^{x-y}(1) \\ &= e^{x+y} + e^{x-y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= (e^{x+y})' + (e^{x-y})' - \frac{1}{2} \\ &= e^{x+y}(x+y)' + e^{x-y}(x-y)' - \frac{1}{2} \\ &= e^{x+y}(1) + e^{x-y}(-1) - \frac{1}{2} \\ &= e^{x+y} - e^{x-y} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= (e^{x+y})' + (e^{x-y})' \\ &= e^{x+y}(x+y)' + e^{x-y}(x-y)' \\ &= e^{x+y}(1) + e^{x-y}(1) \\ &= e^{x+y} + e^{x-y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (e^{x+y})' + (e^{x-y})' \\ &= e^{x+y}(x+y)' + e^{x-y}(x-y)' \\ &= e^{x+y}(1) + e^{x-y}(-1) \\ &= e^{x+y} - e^{x-y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (e^{x+y})' - (e^{x-y})' \\ &= e^{x+y}(x+y)' - e^{x-y}(x-y)' \\ &= e^{x+y}(1) - e^{x-y}(-1) \\ &= e^{x+y} + e^{x-y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= (e^{x+y})' - (e^{x-y})' \\ &= e^{x+y}(x+y)' - e^{x-y}(x-y)' \\ &= e^{x+y}(1) - e^{x-y}(-1) \\ &= e^{x+y} + e^{x-y}\end{aligned}$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$\begin{aligned}H &= \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{x+y} + e^{x-y} & e^{x+y} - e^{x-y} \\ e^{x+y} - e^{x-y} & e^{x+y} + e^{x-y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES:

(7.A)

$$|H_1| = |e^{x+y} + e^{x-y}|$$

$$= e^{x+y} + e^{x-y} > 0 \quad e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} e^{x+y} + e^{x-y} & e^{x+y} - e^{x-y} \\ e^{x+y} - e^{x-y} & e^{x+y} + e^{x-y} \end{vmatrix}$$

$$= (e^{x+y} + e^{x-y})(e^{x+y} + e^{x-y}) - (e^{x+y} - e^{x-y})(e^{x+y} - e^{x-y})$$

$$= e^{2x+2y} + 2e^{2x} + e^{2x-2y} - (e^{2x+2y} - 2e^{2x} + e^{2x-2y})$$

$$= \cancel{e^{2x+2y}} + 2e^{2x} + \cancel{e^{2x-2y}} - \cancel{e^{2x+2y}} + 2e^{2x} - \cancel{e^{2x-2y}}$$

$$= 4e^{2x} > 0 \quad e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

UMA VEZ QUE $f''_{11} > 0$ E $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$ IMPLICA QUE z É UMA FUNÇÃO ESTRICTAMENTE CONVEXA DE x E y .

(6.C) $w = (x + 2y + 3z)^2$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x + 2y + 3z)(x + 2y + 3z)'$$

$$= 2(x + 2y + 3z)(1)$$

$$= 2(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(x + 2y + 3z)(x + 2y + 3z)'$$

$$= 2(x + 2y + 3z)(2)$$

$$= 4(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2(x + 2y + 3z)(x + 2y + 3z)'$$

$$= 2(x + 2y + 3z)(3)$$

$$= 6(x + 2y + 3z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 4 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 6$$

LISTA V MATEMÁTICA I
2023/1.º

(8)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 8 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 4 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 12$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 18 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 6 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = 12$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{13} \\ f''_{21} & f''_{22} & f''_{23} \\ f''_{31} & f''_{32} & f''_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$|H_1| = |2| \\ = 2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$= (2)(8) - (4)(4)$$

$$= 16 - 16$$

$$= 0$$

COMO NÃO SE ENCAIXA NO PADRÃO DE CONVEXIDADE/CONCAVIDADE ESTÁ
TAÍTA DEVE-SE ANALISAR TODOS OS MENORES PRINCIPAIS. LOGO,

(P.A)

EXISTEM TRÊS MENORES PRINCIPAIS DE 2ª ORDEM:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 0 \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = 0 \quad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

EXISTEM TRÊS MENORES PRINCIPAIS DE 1ª ORDEM:

$$|f_{11}''| = |2| \\ = 2 > 0$$

$$|f_{22}''| = |8| \\ = 8 > 0$$

$$|f_{33}''| = |18| \\ = 18 > 0$$

UMA VEZ QUE TODOS OS MENORES PRINCIPAIS DE 1ª E 2ª ORDEM SÃO TODOS MAIORES OU IGUAIS A ZERO IMPLICA QUE W É UMA FUNÇÃO CONVEXA DE X, Y E Z.

(6.7) $Z = X - Y - X^2$

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 1 - 2X$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y} = -1$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial Y \partial X} = 0$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍQUIDOS:

$$|H_1| = |-2|$$

$$= -2 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(0) - (0)(0)$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

Como os menores principais líderes não se encaixam no padrão de convexidade/concavidade estrita deve-se analisar todos os menores principais. Logo,

EXISTE UM MENOR PRINCIPAL DE 2ª ORDEM:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

EXISTEM DOIS MENORES PRINCIPAIS DE 1ª ORDEM:

$$|f''_{11}| = |-2|$$

$$= -2 < 0$$

$$|f''_{22}| = |0|$$

$$= 0$$

UMA VEZ QUE OS MENORES PRINCIPAIS DE 1ª ORDEM SÃO MENORES OU IGUAIS A ZERO E O MENOR PRINCIPAL DE 2ª ORDEM É IGUAL A ZERO IMPLICA QUE z É UMA FUNÇÃO CONCAVA DE x E y .

EXERCÍCIO 7:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2ax + 2by + p$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2bx + 2cy + q$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2a$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2b$$

9.19

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2c$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 2b$$

Montando a matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{bmatrix}$$

Calculando os menores principais líderes:

$$|H_1| = |2a|$$

$$= 2a$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix}$$

$$= (2a)(2c) - (2b)(2b)$$

$$= 4ac - 4b^2$$

$$= 4(ac - b^2)$$

Como se sabe, o padrão dos sinais dos determinantes de uma função estritamente côncava é dado por:

$$f''_{11} < 0 \text{ e } f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$$

sendo assim,

$$a < 0 \text{ e } ac - b^2 > 0 \quad \blacksquare$$

Por sua vez, o padrão dos sinais dos menores principais líderes de uma função estritamente convexa é dado por:

$$f''_{11} > 0 \text{ e } f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$$

sendo assim,

$$a > 0 \text{ e } ax - b^2 > 0 \quad \blacksquare$$

Exercício 8:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -12x + (2a + 4)y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (2a + 4)x - 2y + 4a$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -12$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 2a + 4$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2a + 4$$

Montando a matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & 2a + 4 \\ 2a + 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculando os menores principais de 1ª ordem:

$$|f''_{11}| = |-12| \\ = -12 < 0$$

$$|f''_{22}| = |-2| \\ = -2 < 0$$

CALCULANDO O MENOR PRINCIPAL DE 2ª ORDEM:

170.9

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -12 & 2a+4 \\ 2a+4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-12)(-2) - (2a+4)(2a+4)$$

$$= 24 - (4a^2 + 8a + 8a + 16)$$

$$= -4a^2 - 16a - 16 + 24$$

$$= -4a^2 - 16a + 8$$

COMO SE SABE, O PADRÃO DOS SINAIS DOS MENORES PRINCIPAIS DE UMA FUNÇÃO CONCAVA É DADO POR:

$$f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0 \text{ E } f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 \geq 0$$

SENDO ASSIM,

$$-4a^2 - 16a + 8 \geq 0$$

FÓRMULA DE BHASKARA:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-16)^2 - 4(-4)(8)$$

$$= 256 + 128$$

$$= 384$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-16) \pm \sqrt{384}}{2(-4)}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{6(8)^2}}{-8}$$

$$= \frac{16 \pm 8\sqrt{6}}{-8}$$

$$= \frac{8(2 \pm \sqrt{6})}{-8}$$

$$= (-1)(2 \pm \sqrt{6})$$

$$= -2 \mp \sqrt{6} \quad \begin{matrix} \nearrow a_1 = -2 - \sqrt{6} \\ \searrow a_2 = -2 + \sqrt{6} \end{matrix}$$

ENTÃO,

$$-2 - \sqrt{6} \leq \alpha \leq -2 + \sqrt{6}$$

POR ÚLTIMO, UMA VEZ QUE $f''_{\eta\eta} < 0$ A FUNÇÃO NUNCA PODERÁ SER CONVEXA.

EXERCÍCIO 9:

9.A) $f(x, y) = A [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-1/\rho}$ $\therefore A > 0, \rho \neq 0 \text{ e } 0 \leq \delta \leq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= A \left(-\frac{1}{\rho} \right) [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-1/\rho - 1} [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]' \\ &= A \left(-\frac{1}{\rho} \right) [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-\frac{1-\rho}{\rho}} (-\rho \delta x^{-\rho-1}) \\ &= A [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-\frac{1-\rho}{\rho}} (\delta x^{-\rho-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= A \left(-\frac{1}{\rho} \right) [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-1/\rho - 1} [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]' \\ &= A \left(-\frac{1}{\rho} \right) [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-\frac{1-\rho}{\rho}} [-\rho (1-\delta)y^{-\rho-1}] \\ &= A [\delta x^{-\rho} + (1-\delta)y^{-\rho}]^{-\frac{1-\rho}{\rho}} [(1-\delta)y^{-\rho-1}] \end{aligned}$$

17.9

9.3) $f(x, y) = x^a y^b \quad \therefore a \geq 0, b \geq 0$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = a x^{a-1} y^b$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = b x^a y^{b-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = a(a-1) x^{a-2} y^b$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = a b x^{a-1} y^{b-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = b(b-1) x^a y^{b-2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = a b x^{a-1} y^{b-1}$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a^2 - a) x^{a-2} y^b & a b x^{a-1} y^{b-1} \\ a b x^{a-1} y^{b-1} & (b^2 - b) x^a y^{b-2} \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$|H_1| = |(a^2 - a) x^{a-2} y^b|$$

$$= (a^2 - a) x^{a-2} y^b$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} (a^2 - a) x^{a-2} y^b & a b x^{a-1} y^{b-1} \\ a b x^{a-1} y^{b-1} & (b^2 - b) x^a y^{b-2} \end{vmatrix}$$

$$= [(a^2 - a) x^{a-2} y^b][(b^2 - b) x^a y^{b-2}] - [a b x^{a-1} y^{b-1}][a b x^{a-1} y^{b-1}]$$

$$= (a^2 - a)(b^2 - b) x^{2a-2} y^{2b-2} - a^2 b^2 x^{2a-2} y^{2b-2}$$

$$|H_2| = x^{2a-2} y^{2b-2} [(a^2-a)(b^2-b) - a^2 b^2]$$

92.9

$$= x^{2a-2} y^{2b-2} (a^2 b^2 - a^2 b - a b^2 + a b - a^2 b^2)$$

$$= x^{2a-2} y^{2b-2} (-a^2 b - a b^2 + a b)$$

$$= x^{2a-2} y^{2b-2} [ab(-a-b)]$$

$$= x^{2a-2} y^{2b-2} [-ab(a+b)] \quad \text{como } a+b=1$$

$$= x^{2a-2} y^{2b-2} [-ab(1)]$$

$$= -ab x^{2a-2} y^{2b-2}$$

COMO SE SABE, OS SINAIS DOS MEMBROS PRINCIPAIS LÍNEARES DE UMA FUNÇÃO ESTRICTAMENTE CÔNCAVA SÃO DADOS POR:

$$f''_{11} < 0 \quad \text{E} \quad f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$$

SENDO ASSIM,

$$(a^2-a)x^{a-2}y^b < 0 \quad \therefore 0 < a < 1$$

$$-ab x^{2a-2} y^{2b-2} > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ E } b > 0 \quad (1)$$

OU

$$a > 0 \text{ E } b < 0 \quad (2)$$

TODAVIA, COMO O VALOR DE a PARA QUE $f''_{11} < 0$ DEVE

SEJA $0 < a < 1$ OPTA-SE PELA RELAÇÃO (2) PARA QUE $f''_{11} f''_{22} - (f''_{12})^2 > 0$.

EXERCÍCIO 90:

10.9 $f(x) = 3x + 4$

AS FUNÇÕES LINEARES SÃO CÔNCAVAS E CONVEXAS AO MESMO TEMPO. É UMA VEZ QUE TODA FUNÇÃO CÔNCAVA É QUASE CÔNCAVA CONCLUI-SE QUE $f(x)$ É QUASE CÔNCAVA.

10.3 $f(x, y) = -x^2 y^3$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2xy^3$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -3x^2 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = -2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -6x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = -6xy^2$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA ORLADA:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & f'_1 & f'_2 \\ f'_1 & f''_{11} & f''_{12} \\ f'_2 & f''_{21} & f''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2xy^3 & -3x^2 y^2 \\ -2xy^3 & -2y^3 & -6xy^2 \\ -3x^2 y^2 & -6xy^2 & -6x^2 y \end{bmatrix}$$

A ORDEM DA MATRIZ HESSIANA ORLADA É DADA PELO NÚMERO DE VARIÁVEIS DE f E NÃO PELA DIMENSÃO. PARA SABER QUANTOS MEMBROS PRINCIPAIS LÍDERES A SER CALCULADO, CONSIDERA-SE $m - r$, EM QUE m É O NÚMERO DE VARIÁVEIS. NESSE CASO,

$$\begin{aligned} m - r &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

DESSA FORMA, DEVE-SE CALCULAR APENAS UM MEMBRO PRINCIPAL LÍDER.

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -2xy^3 & -3x^2y^2 \\ -2xy^3 & -2y^3 & -6xy^2 \\ -3x^2y^2 & -6xy^2 & -6x^2y \end{vmatrix}$$

13.9

$$= (0) \begin{vmatrix} -2y^3 & -6xy^2 \\ -6xy^2 & -6x^2y \end{vmatrix} - (-2xy^3) \begin{vmatrix} -2xy^3 & -6xy^2 \\ -3x^2y^2 & -6x^2y \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3x^2y^2) \begin{vmatrix} -2xy^3 & -2y^3 \\ -3x^2y^2 & -6xy^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2xy^3) \{ (-2xy^3)(-6x^2y) - (-6xy^2)(-3x^2y^2) \} +$$

$$+ (-3x^2y^2) [(-2xy^3)(-6xy^2) - (-2y^3)(-3x^2y^2)]$$

$$= (2xy^3)(12x^3y^4 - 18x^3y^4) + (-3x^2y^2)(12x^2y^5 - 6x^2y^5)$$

$$= (2xy^3)(-6x^3y^4) + (-3x^2y^2)(6x^2y^5)$$

$$= -12x^4y^7 - 18x^4y^7$$

$$= -30x^4y^7 < 0$$

PARA QUE A FUNÇÃO SEJA QUASE CÔNCAVA:

$(-1)^2 |\bar{H}| > 0 \therefore |\bar{H}| > 0$, SENDO ASSIM, $y < 0$ PARA ATENDER A CONDIÇÃO DE QUE $-30x^4y^7 > 0$.

10.C $f(x, y) = ye^x$, $y > 0$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y(e^x)' + (e^x)(y)'$$

$$= ye^x(x)' + e^x(0)$$

$$= ye^x + 0$$

$$= ye^x$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = e^x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= y(e^x)' + e^x(y)' \\ &= ye^x(x)' + e^x(0)' \\ &= ye^x + 0 \\ &= ye^x\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = e^x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= e^x(x)' \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} &= e^x(x)' \\ &= e^x\end{aligned}$$

CONSTRUINDO A MATRIZ HESSIANA ORDA DA:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & f_1' & f_2' \\ f_1' & f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_2' & f_{21}'' & f_{22}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ye^x & e^x \\ ye^x & ye^x & e^x \\ e^x & e^x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}m-1 &= 2-1 \\ &= 1\end{aligned}$$

m, NÚMERO DE VARIÁVEIS
DE f.

LOGO, DEVE-SE CALCULAR APENAS UM MENOR PRINCIPAL LÍDER.

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & ye^x & e^x \\ ye^x & ye^x & e^x \\ e^x & e^x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0) \begin{vmatrix} ye^x & e^x \\ e^x & 0 \end{vmatrix} - (ye^x) \begin{vmatrix} ye^x & e^x \\ e^x & 0 \end{vmatrix} + (e^x) \begin{vmatrix} ye^x & ye^x \\ e^x & e^x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= -(ye^x)[(ye^x)(0) - (e^x)(e^x)] + (e^x)[(ye^x)(e^x) - (ye^x)(e^x)] \\ &= -(ye^x)(0 - e^{2x}) + (e^x)(0)\end{aligned}$$

$$|H| = -(ye^x)(-e^{2x}) + 0 \\ = ye^{3x} > 0$$

(14.9)

UMA VEZ QUE O SINAL DO DETERMINANTE DA MATRIZ HESSIANA ORLA DA É POSITIVO E $y > 0$ IMPLICA QUE $f(x, y)$ É QUASE CÔNCAVA.

(10.7) $f(x) = x^3 + x^2 + 1, \quad x < 0$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 + 2x \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x + 2$$

PARA $x < 0$ TEM-SE QUE:

$$f'' < 0$$

SENDO ASSIM, A FUNÇÃO É CÔNCAVA E TODA FUNÇÃO CÔNCAVA É TAMBÉM QUASE CÔNCAVA.

EXERCÍCIO 11:

(11.9) $g(x) = \frac{1}{1-x} \qquad x_0 = -2$

$$g_4(x_0) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{g^3(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \frac{g^4(x_0)(x-x_0)^4}{4!}$$

$$g(x_0) = \frac{1}{1-x_0} \qquad g(-2) = \frac{1}{1+2} \\ g(-2) = \frac{1}{1-(-2)} \qquad = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \left(\frac{1}{1-x_0} \right)' \\ &= \frac{(1-x_0)(1)' - (1)(1-x_0)'}{(1-x_0)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x_0)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(-2) &= \frac{1}{[1-(-2)]^2} \\ &= \frac{1}{(1+2)^2} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x_0) &= \left[\frac{1}{(1-x_0)^2} \right]' \\ &= \frac{(1-x_0)^2(1)' - (1)[(1-x_0)^2]'}{(1-x_0)^4} \\ &= \frac{2}{(1-x_0)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(-2) &= \frac{2}{[1-(-2)]^3} \\ &= \frac{2}{(1+2)^3} \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^3(x_0) &= \left[\frac{2}{(1-x_0)^3} \right]' \\ &= \frac{(1-x_0)^3(2)' - (2)[(1-x_0)^3]'}{(1-x_0)^6} \\ &= \frac{6}{(1-x_0)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^3(-2) &= \frac{6}{[1-(-2)]^4} \\ &= \frac{6}{(1+2)^4} \\ &= \frac{6}{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^4(x_0) &= \left[\frac{6}{(1-x_0)^4} \right]' \\ &= \frac{(1-x_0)^4(6)' - (6)[(1-x_0)^4]'}{(1-x_0)^8} \\ &= \frac{24}{(1-x_0)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^4(-2) &= \frac{24}{[1-(-2)]^5} \\ &= \frac{24}{(1+2)^5} \\ &= \frac{24}{243} \end{aligned}$$

$$p_4(-2) \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x+2) + \frac{2^2}{27} \frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{6^2}{81} \frac{(x+2)^3}{6^2} + \frac{24^2}{243} \frac{(x+2)^4}{24^2} \quad (93.9)$$

$$\approx \frac{1}{3} + \frac{1}{9}(x+2) + \frac{1}{27}(x+2)^2 + \frac{1}{81}(x+2)^3 + \frac{1}{243}(x+2)^4$$

(97.8) $R(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad x_0 = -2$

$$R_4(x_0) = R(x_0) + \frac{R'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{R''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{R'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \frac{R^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4}{4!}$$

$$R(x_0) = \frac{1-x_0}{1+x_0}$$

$$= \frac{1-(-2)}{1+(-2)}$$

$$= \frac{1+2}{1-2}$$

$$R(x_0) = \frac{3}{-1} = -3$$

$$R'(x_0) = \left(\frac{1-x_0}{1+x_0} \right)'$$

$$= \frac{(1+x_0)(1-x_0)' - (1-x_0)(1+x_0)'}{(1+x_0)^2}$$

$$= \frac{-2}{(1+x_0)^2}$$

$$R'(-2) = \frac{-2}{(1-2)^2}$$

$$= \frac{-2}{(-1)^2}$$

$$= -2$$

$$R''(x_0) = \left[\frac{-2}{(1+x_0)^2} \right]'$$

$$= \frac{(1+x_0)^2(-2)' - (-2)[(1+x_0)^2]'}{(1+x_0)^4}$$

$$= \frac{4}{(1+x_0)^3}$$

$$R''(-2) = \frac{4}{(1-2)^3}$$

$$= \frac{4}{(-1)^3}$$

$$= -4$$

$$R^3(x_0) = \left[\frac{4}{(1+x_0)^3} \right]'$$

$$= \frac{(1+x_0)^3(4)' - (4)[(1+x_0)^3]'}{(1+x_0)^6}$$

$$= \frac{-12}{(1+x_0)^4}$$

$$R^3(-2) = \frac{-12}{(1-2)^4}$$

$$= \frac{-12}{(-1)^4}$$

$$= -12$$

$$R^4(x_0) = \left[\frac{-12}{(1+x_0)^4} \right]'$$

$$= \frac{(1+x_0)^4(-12)' - (-12)[(1+x_0)^4]'}{(1+x_0)^8}$$

$$= \frac{48}{(1+x_0)^5}$$

$$R^4(-2) = \frac{48}{(1-2)^5}$$

$$= \frac{48}{(-1)^5}$$

$$= -48$$

$$R_4(x_0) \approx -3 - \frac{2(x+2)}{1!} - \frac{4(x+2)^2}{2!} - \frac{12(x+2)^3}{3!} - \frac{48(x+2)^4}{4!}$$

$$\approx -3 - 2(x+2) - \frac{4^2(x+2)^2}{2^1} - \frac{42^2(x+2)^3}{6^1} - \frac{48^2(x+2)^4}{24^1}$$

$$\approx -3 - 2(x+2) - 2(x+2)^2 - 2(x+2)^3 - 2(x+2)^4$$

EXERCÍCIO 12:

12.A) $f(x, y) = e^{x+y}(xy-1)$

PONTO (0, 0)

$$f(0, 0) = e^{(0+0)}[(0)(0)-1]$$

$$= e^0(-1)$$

$$= -1$$

$$\begin{aligned}
 f_1' &= e^{x+y} (xy-1)' + (xy-1) (e^{x+y})' \\
 &= e^{x+y} (y)' + (xy-1) e^{x+y} (x+y)' \\
 &= ye^{x+y} + (xy-1) e^{x+y} (1) \\
 &= ye^{x+y} + (xy-1) e^{x+y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2' &= e^{x+y} (xy-1)' + (xy-1) (e^{x+y})' \\
 &= e^{x+y} (x)' + (xy-1) e^{x+y} (x+y)' \\
 &= xe^{x+y} + (xy-1) e^{x+y} (1) \\
 &= xe^{x+y} + (xy-1) e^{x+y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1'(0,0) &= (0) e^{(0+0)} + [(0)(0)-1] e^{(0+0)} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2'(0,0) &= (0) e^{(0+0)} + [(0)(0)-1] e^{(0+0)} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &\approx f(x_0, y_0) + f_1'(x_0, y_0)(x-x_0) + f_2'(x_0, y_0)(y-y_0) \\
 &\approx f(0,0) + f_1'(0,0)(x-0) + f_2'(0,0)(y-0) \\
 &= -1 - 1(x) - 1(y) \\
 &= -1 - x - y
 \end{aligned}$$

12.3 $f(x,y) = e^{xe^y}$ PONTO $(0,0)$

$$\begin{aligned}
 f(0,0) &= e^{(0)(e^0)} \\
 &= e^0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_1'(x,y) &= e^{xe^y} (xe^y)' \\
 &= e^{xe^y} e^y \\
 &= e^{xe^y+y}
 \end{aligned}$$

2023/1-0

17

$$\begin{aligned} f'_2(x, y) &= e^{xe^y} (xe^y)' \\ &= e^{xe^y} x e^y \\ &= x e^{xe^y + y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_1(0, 0) &= e^{(0)(e^0)} + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_2(0, 0) &= (0)(e^{(0)(e^0)} + 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + f'_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_2(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\approx f(0, 0) + f'_1(0, 0)(x - 0) + f'_2(0, 0)(y - 0) \\ &\approx 1 + 1(x) + (0)(y) \\ &\approx 1 + x \end{aligned}$$

72.C $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

Ponto (0, 0)

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \ln[1 + (0)^2 + (0)^2] \\ &= \ln(1 + 0 + 0) \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_1 &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)' \\ &= \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$f'_2 = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)'$$

$$f'_2 = \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}$$

17.1

$$f'_1(0,0) = \frac{2(0)}{1+(0)^2+(0)^2}$$

$$= 0$$

$$f'_2(0,0) = \frac{2(0)}{1+(0)^2+(0)^2}$$

$$= 0$$

$$f(X,Y) \approx f(X_0, Y_0) + f'_1(X_0, Y_0)(X - X_0) + f'_2(X_0, Y_0)(Y - Y_0)$$

$$\approx f(0,0) + f'_1(0,0)(X-0) + f'_2(0,0)(Y-0)$$

$$\approx 0$$

EXERCÍCIO 13:

13.A $X^2 - 2X^2Y + 3XY^2 - 22 = 0$

PONTO (1,3)

$$\frac{\partial F(X,Y)}{\partial Y} = -2X^2 + 6XY \therefore F'_2(1,3) = -2(1)^2 + 6(1)(3)$$

$$= -2 + 18$$

$$= 16$$

UMA VEZ QUE $f'_2(1,3) \neq 0$ IMPLICA QUE EXISTE UMA FUNÇÃO IMPLÍCITA $Y = \mu(X)$ EM TORNO DO PONTO (1,3).

$$\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X} = 2X - 4XY + 3Y^2 \therefore F'_1(1,3) = 2(1) - 4(1)(3) + 3(3)^2$$

$$= 2 - 12 + 3(9)$$

$$= 2 - 12 + 27$$

$$= 17$$

SENDO ASSIM,

$$Y'(x_0) = - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \quad \therefore Y'(1, 3) = - \frac{17}{16}$$

13.3 $2x^2 + 4xy - y^4 + 67 = 0$ Ponto $(1, 3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 4x - 4y^3 \quad \therefore f'_2(1, 3) = 4(1) - 4(3)^3 \\ &= 4 - 4(27) \\ &= -104 \end{aligned}$$

Uma vez que $f'_2(1, 3) \neq 0$ implica que existe uma função implícita $y = f(x)$ em torno do ponto $(1, 3)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 4x + 4y \quad \therefore f'_1(1, 3) = 4(1) + 4(3) \\ &= 16 \end{aligned}$$

sendo assim,

$$\begin{aligned} Y'(x_0) &= - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \quad \therefore Y'(1) = - \frac{16}{-104} \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 14:

As equações $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ definem u e v como variáveis endógenas do sistema e por sua vez x e y como variáveis

VEIS EXÓGENAS. OU SEJA, μ E η DEPENDEM DE X E Y .

18.A

COMO SE SABE, O SISTEMA SERÁ SATISFEITO NA VIZINHANÇA DE $(x_0, y_0, \mu_0, \eta_0)$ SE O DETERMINANTE DA MATRIZ JACOBIANA FOR DIFERENTE DE ZERO. ESSA MATRIZ JACOBIANA SERÁ MONTADA COM AS DERIVADAS PARCIAIS DE 1ª ORDEM EM RELAÇÃO A μ E η .

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \eta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \mu - 2\eta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = 2\mu + \eta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \mu$$

MONTANDO A MATRIZ JACOBIANA DE PRIMEIRA DERIVADAS DE f E g :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mu} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial g}{\partial \mu} & \frac{\partial g}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & \mu - 2\eta \\ 2\mu + \eta & \mu \end{bmatrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \eta & \mu - 2\eta \\ 2\mu + \eta & \mu \end{vmatrix}$$

$$= (\eta)(\mu) - (\mu - 2\eta)(2\mu + \eta)$$

$$= \mu\eta - (2\mu^2 + \mu\eta - 4\mu\eta - 2\eta^2)$$

$$= \mu\eta - 2\mu^2 - \mu\eta + 4\mu\eta + 2\eta^2$$

$$= 2\eta^2 + 4\mu\eta - 2\mu^2$$

LOGO, PARA QUE O SISTEMA SEJA REPRESENTADO PELAS EQUAÇÕES $\mu = f(x, y)$ E $\eta = g(x, y)$ NA VIZINHANÇA DO PONTO $(x_0, y_0, \mu_0, \eta_0)$ IMPLICA QUE:

$$2\eta^2 + 4\mu\eta - 2\mu^2 \neq 0$$

QUANDO $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 1, -1, 2)$ PODE-SE MOSTRAR QUE AS CONDIÇÕES EXIGIDAS SÃO SATISFEITAS:

$$\begin{aligned} |J| &= 2u^2 + 4uv - 2v^2 \\ &= 2(2)^2 + 4(-1)(2) - 2(-1)^2 \\ &= 2(4) - 8 - 2(1) \\ &= 8 - 8 - 2 \\ &= -2 \quad \therefore |J| \neq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ENCONTRANDO $f'_x(2, 1)$, $f'_y(2, 1)$, $g'_x(2, 1)$ E $g'_y(2, 1)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u & u - 2v \\ 2u + v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 - 2(2) \\ 2(-1) + 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(2) & -2(1) \\ 1 & 2(1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 - 4 \\ -2 + 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

19.9

$$\begin{bmatrix} 2f'_x - 5g'_x = -4 \\ -g'_x = -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2f'_y - 5g'_y = 2 \\ -g'_y = -2 \end{bmatrix}$$

$$-g'_x = -1 \therefore g'_x = 1 \therefore 2f'_x - 5g'_x = -4$$

$$2f'_x - 5(1) = -4 \therefore f'_x = \frac{1}{2}$$

$$-g'_y = -2 \therefore g'_y = 2 \therefore 2f'_y - 5g'_y = 2$$

$$2f'_y - 5(2) = 2 \therefore f'_y = 6$$

EXERCÍCIO 15: $U = Y^2 + 2M^2 - XY + M^2 = 15$ e $V = XY + 2Y^2 + M^2 + M^2 = 38$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial m} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial m} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x = f(u, m) \\ y = g(u, m) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -Y_0 & 2Y_0 - X_0 \\ Y_0 & X_0 + 4Y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_u & f'_m \\ g'_u & g'_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4u_0 & 2m_0 \\ 2u_0 & 2m_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2(4) - 1 \\ 4 & 1 + 4(4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_u & f'_m \\ g'_u & g'_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4(1) & 2(-1) \\ 2(1) & 2(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 4 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f'_u & f'_m \\ g'_u & g'_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4f'_u + 7g'_u = -4 & -4f'_m + 7g'_m = 2 \\ 4f'_u + 17g'_u = -2 & 4f'_m + 17g'_m = 2 \end{bmatrix}$$

2013/14

(20)

$$\begin{cases} -4f'_u + 7g'_u = -4 \\ 4f'_u + 17g'_u = -2 \end{cases}$$

$$24g'_u = -6$$

$$g'_u = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} -4f'_u + 7g'_u = 2 \\ 4f'_u + 17g'_u = 2 \end{cases}$$

$$24g'_u = 4$$

$$g'_u = \frac{1}{6}$$

$$4f'_u + 17g'_u = -2$$

$$4f'_u + 17\left(-\frac{1}{4}\right) = -2$$

$$4f'_u - \frac{17}{4} = -2$$

$$\frac{16f'_u - 17 = -8}{4}$$

$$16f'_u = -8 + 17 \quad \therefore f'_u = \frac{9}{16}$$

$$g'_u(1, -1) = \frac{\partial Y}{\partial u}(1, -1) = -\frac{1}{4}$$

$$f'_u(1, -1) = \frac{\partial X}{\partial u}(1, -1) = \frac{9}{16}$$

EXERCÍCIO 16:

16.A) $f(2, 2) = 2^4 \cdot 2 = 32$

TEOREMA DE EULER

$$\underline{x} \cdot \nabla f = n \cdot f(\underline{x})$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} = 4(32)$$

$$(2 \ 2) \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix} = 128$$

$$2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 128$$

$$2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 128$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 64$$

LOGO, É FALSO ESSE ITEM.

(16.B) FALSO.

$$f(x) = x^4$$

$$f(ax) = (ax)^4 \quad \therefore f'_x = 4(ax)^3 \\ = 4a^3 x^3$$

(20.A)

(16.C) TEOREMA DE EULER

$$\underline{x} \cdot \nabla f = n \cdot f(\underline{x})$$

$$\underline{x} \cdot \nabla f = n \cdot f(\underline{x})$$

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = 4 f(x, y)$$

$$x \cdot f_x + y \cdot f_y = 4 f(x, y)$$

$$f_x + x \cdot f_{xx} + y \cdot f_{xy} = 4 f_x$$

$$x \cdot f_{xy} + f_y + y \cdot f_{yy} = 4 f_y$$

$$x \cdot f_{xx} + y \cdot f_{xy} = 3 f_x$$

$$x \cdot f_{xy} + y \cdot f_{yy} = 3 f_y$$

LOGO, O ITEM É VERDADEIRO

(16.D) $\underline{x} \cdot \nabla f = n \cdot f(\underline{x})$

LOGO,

$$f \cdot \nabla f = 4 f(P) \quad f \text{ e } \nabla f \text{ S\AA O ORTOGONAIS}$$

$$0 = 4 f(P)$$

$$f(P) = 0$$

LOGO, O ITEM É VERDADEIRO

EXERCÍCIO 17:

(17.A) FALSO, POIS PODE-SE TER:

$$f(x, y, z) = 2x + C$$

$$(17.B) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = e^{-c^2 t} \cos(cx)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = e^{-c^2 t} \sin(cx) (-c^2 t)'$$

$$= -c^2 e^{-c^2 t} \sin(cx)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = -e^{-c^2 t} \sin(cx)$$

LOGO, O ITEM É VERDADEIRO.

17.1 $z = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \cdot 2e^{2t} + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \cdot -2e^{-2t}$$

$$= \frac{4x - 4y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{4e^{2t} - 4e^{-2t}}{(e^{2t} + e^{-2t})^{1/2}}$$

$$= \frac{4 - 4}{(1 + 1)^{1/2}}$$

$$= 0$$

Logo, o item é verdadeiro.

17.2 $f(x, y) = e(x^2)^{1/2}(xy)^{3/2} - \frac{2(x^2)^3}{xy}$

$$= e \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2} \cdot x^{3/2} \cdot y^{3/2} - \frac{2x^3 \cdot x^3}{xy}$$

$$= e \cdot x^2 \cdot x^{1/2} \cdot y^{3/2} - \frac{2x^2 \cdot x^3}{y}$$

$$= x^2 \left(e \cdot x^{1/2} \cdot y^{3/2} - \frac{2x^3}{y} \right)$$

$$= x^2 \cdot f(x, y) \quad \text{Logo, o item é verdadeiro.}$$

EXERCÍCIO 18:

(21.9)

18.A $g'_x = 2x$ $g'_y = 2y$

$$g''_{xx} = 2 \quad g''_{xy} = 0$$

$$g''_{yx} = g''_{xy} \text{ Z, PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad g''_{yy} = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} \\ g''_{yx} & g''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MEMBRES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$|H_1| = |2| \\ = 2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ = (2) \cdot (2) - (0) \cdot (0) \\ = 4 > 0$$

LOGO, O ÍTEM É VERDADEIRO.

UMA VEZ QUE TODOS OS MEMBRES PRINCIPAIS LÍDERES SÃO POSITIVOS, IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA POSITIVA E, SENDO ASSIM, A FUNÇÃO É ESTRICTAMENTE CONVEXA.

18.B $R'_x = 3x^2y^3 - 1$ $R'_y = 3x^3y^2 - 1$

$$R''_{xx} = 6xy^3 \quad R''_{xy} = 9x^2y^2$$

$$R''_{yx} = R''_{xy} \text{ Z, PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad R''_{yy} = 6x^3y$$

$$H = \begin{bmatrix} R''_{xx} & R''_{xy} \\ R''_{yx} & R''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^3 & 9x^2y^2 \\ 9x^2y^2 & 6x^3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

MEMBRES PRINCIPAIS:

$$|H_1| = |-6|$$

$$= -6 < 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|H_2| = |-6|$$

$$= -6 < 0$$

$$= (-6) \cdot (-6) - (9) \cdot (9)$$

$$= -45 < 0$$

LOGO, O ITEM É FALSO

LOGO, A MATRIZ HESSIANA É INDEFINIDA.

78.C $\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = 3x^3y^2 - 1 \therefore H'(1,1) = 2$

UMA VEZ QUE $H'(1,1) \neq 0$ IMPLICA QUE EXISTE UMA FUNÇÃO IMPLÍCITA $y = R(x)$ EM TORNO DO PONTO $(1,1)$.

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^3 - 1 \therefore H'(1,1) = 2$$

$$y'(1) = -\frac{2}{2}$$

$$= -1$$

LOGO, O ITEM É VERDADEIRO.

EXERCÍCIO 79:

79.A $f'_x = \frac{3}{4} x^{-1/4} y^{1/4}$

$$f'_y = \frac{1}{4} x^{3/4} y^{-3/4}$$

$$f''_{xx} = -\frac{3}{16} x^{-5/4} y^{1/4}$$

$$f''_{xy} = \frac{3}{16} x^{-1/4} y^{-3/4}$$

$f''_{yx} = f''_{xy}$ PELO TEOREMA DE YOUNG $f''_{yy} = -\frac{3}{16} x^{3/4} y^{-7/4}$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} x^{-5/4} y^{1/4} & \frac{3}{16} x^{-1/4} y^{-3/4} \\ \frac{3}{16} x^{-1/4} y^{-3/4} & -\frac{3}{16} x^{3/4} y^{-7/4} \end{bmatrix}$$

MEMORES PRINCIPAIS:

22.9

$$|H_1| = \left| -\frac{3}{16} x^{-3/4} y^{1/4} \right|$$

$$|H_2| = \left| -\frac{3}{16} x^{3/4} y^{-7/4} \right|$$

$$= -\frac{3}{16} x^{-3/4} y^{1/4} < 0$$

$$= -\frac{3}{16} x^{3/4} y^{-7/4} < 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{16} x^{-3/4} y^{1/4} & \frac{3}{16} x^{-1/4} y^{-3/4} \\ \frac{3}{16} x^{-1/4} y^{-3/4} & -\frac{3}{16} x^{1/4} y^{-7/4} \end{vmatrix}$$

LOGO, O ITER É VERDADEIRO.

$$= 0$$

LOGO, A MATRIZ HESSIANA É SEMIDEFINIDA NEGATIVA E, SENDO ASSIM, A FUNÇÃO É CONCAVA.

79.3