

EXERCÍCIO 1:

(1.1) $x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$

$$f'_x = 4x^3 + 2x - 6y = 0$$

$$f'_y = -6x + 6y = 0$$

$$\begin{cases} 4x^3 + 2x - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

1.º) $4x = 0$

$$\boxed{x = 0}$$

2.º) $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$\boxed{x = \pm 1}$$

PARA $x = 0$

$$-6x + 6y = 0$$

$$-6(0) + 6y = 0$$

$$0 + 6y = 0$$

$$6y = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

PARA $x = -1$

$$-6(-1) + 6y = 0$$

$$6 + 6y = 0$$

$$6y = -6$$

$$\boxed{y = -1}$$

PARA $x = 1$

$$-6(1) + 6y = 0$$

$$-6 + 6y = 0$$

$$6y = 6$$

$$\boxed{y = 1}$$

PONTOS CRÍTICOS:

$$(0, 0); (-1, -1) \text{ e } (1, 1)$$

$$f''_{xx} = 12x^2 + 2$$

$$f''_{xy} = -6$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = 6$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1

ENCONTRANDO OS MEMORES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$D_1 = |12x^2 + 2|$$

$$= 12x^2 + 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (6) \cdot (12x^2 + 2) - (-6) \cdot (-6)$$

$$= 72x^2 + 12 - 36$$

$$= 72x^2 - 24$$

PARA O PONTO CRÍTICO (0,0):

$$D_1 = 12 \cdot (0)^2 + 2$$

$$= 2 > 0$$

$$D_2 = 72 \cdot (0)^2 - 24$$

$$= -24 < 0$$

UMA VEZ QUE OS MEMORES PRINCIPAIS LÍDERES NÃO ALTERNAM DE SINAL NO PADRÃO $(-1)^k D_k(x^*) > 0 \forall k=1, \dots, m$ E SÃO DIFERENTES DE ZERO IMPLICA QUE O PONTO CRÍTICO $(x^*, y^*) = (0,0)$ É UM PONTO DE SELA DA FUNÇÃO.

PARA O PONTO CRÍTICO (-1,-1):

$$D_1 = 12 \cdot (-1)^2 + 2$$

$$= 12 + 2$$

$$= 14 > 0$$

$$D_2 = 72 \cdot (-1)^2 - 24$$

$$= 72 - 24$$

$$= 48 > 0$$

UMA VEZ QUE TODOS OS MEMORES PRINCIPAIS LÍDERES SÃO MAIORES QUE ZERO IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA POSITIVA E, SENDO

LISTA VI MATEMÁTICA I

2013/1º

(2)

ASSIM, O PONTO CRÍTICO É UM PONTO DE MÍNIMO LOCAL DA FUNÇÃO.

PARA O PONTO CRÍTICO (1,1):

$$D_1 = 12 \cdot (1)^2 + 2$$

$$= 12 + 2$$

$$= 14 > 0$$

$$D_2 = 72 \cdot (1)^2 - 24$$

$$= 72 - 24$$

$$= 48 > 0$$

UMA VEZ QUE TODOS OS MEMBROS PRINCIPAIS LÍDERES SÃO MAIORES DO QUE ZERO IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA POSITIVA E, SENDO ASSIM, O PONTO CRÍTICO (1,1) É UM PONTO DE MÍNIMO LOCAL DA FUNÇÃO.

$$(1.3) \quad x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$$

$$f'_x = 2x - 6y + 10 = 0$$

$$f'_y = -6x + 4y + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 6y + 10 = 0 & \times (3) \\ -6x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x - 18y + 30 = 0 \\ -6x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$-14y + 32 = 0$$

$$-14y = -32$$

$$y = \frac{32}{14}$$

$$= \frac{16}{7}$$

$$\text{PARA } y = \frac{16}{7}$$

$$-6x + 4\left(\frac{16}{7}\right) + 2 = 0$$

$$-6x + \frac{64}{7} + 2 = 0$$

$$\frac{-42x + 64 + 14 = 0}{7}$$

$$-42x = -78$$

$$x = \frac{13}{7}$$

$$f''_{xx} = 2$$

$$f''_{xy} = -6$$

2.A

$$f''_{yx} = f''_{xy} \text{ 2, PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = 4$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

ENCONTRANDO OS MEMBRES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |2| \\ &= 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (2) \cdot (4) - (-6) \cdot (-6)$$

$$= 8 - 36$$

$$= -28 < 0$$

UMA VEZ QUE OS MEMBRES PRINCIPAIS LÍDERES NÃO ALTERNAM DE SINAL NO PADRÃO $(-1)^k \Delta_k(x^*) > 0 \forall k=1, \dots, m$ E SÃO DIFERENTES DE ZERO IMPLICA QUE O PONTO CRÍTICO $(x^*, y^*) = \left(\frac{23}{17}, \frac{26}{17}\right)$ É UM PONTO DE SELA DA FUNÇÃO.

1.C $xy^2 + x^3y - xy$

$$f'_x = y^2 + 3x^2y - y = 0$$

$$f'_y = 2xy + x^3 - x = 0$$

$$\begin{cases} y^2 + 3x^2y - y = 0 & \times (-2/y) \\ 2xy + x^3 - x = 0 & \times (1/x) \end{cases} \sim \begin{cases} -2y - 6x^2 + 2 = 0 \\ 2y + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-5x^2 + 1 = 0$$

$$-5x^2 = -1$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

2013/11-0

3

$$\text{Para } x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2Y + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 10Y + 1 - 5 = 0$$

$$2Y + \frac{5}{25} - 1 = 0$$

$$10Y - 4 = 0$$

$$10Y = 4$$

$$Y = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$2Y + \frac{1}{5} - 1 = 0$$

$$f''_{xx} = 6xy$$

$$f''_{xy} = 2y + 3x^2 - 1$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \text{ z, PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = 2x$$

$$H = \begin{bmatrix} 6xy & 2y + 3x^2 - 1 \\ 2y + 3x^2 - 1 & 2x \end{bmatrix}$$

no ponto crítico $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$:

$$H = \begin{bmatrix} 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2}{5} & 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 \\ 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 & 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12\sqrt{5}}{25} & \frac{4}{5} + 3 \cdot \left(\frac{5}{25}\right) - 1 \\ \frac{4}{5} + 3 \cdot \left(\frac{5}{25}\right) - 1 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix}$$

3.9

ENCONTRANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍNEARES:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left| \frac{12\sqrt{3}}{25} \right| \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{25} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} \frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2\sqrt{3}}{5} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{12\sqrt{3}}{25} \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} \right) - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{24}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{15}{25} \\ &= \frac{3}{5} > 0 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE TODOS OS MENORES PRINCIPAIS LÍNEARES SÃO MAIORES DO QUE ZERO IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA POSITIVA E, SENDO ASSIM, O PONTO CRÍTICO $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{5} \right)$ É UM PONTO DE MÍNIMO LOCAL.

$$\text{PARA } x = -\frac{\sqrt{3}}{5} \therefore y = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} 6xy & 2y + 3x^2 - 7 \\ 2y + 3x^2 - 7 & 2x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \right) \cdot \frac{2}{5} & 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \right)^2 - 7 \\ 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \right)^2 - 7 & 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix}$$

ENCONTRANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left| -\frac{12\sqrt{3}}{25} \right| \\ &= -\frac{12\sqrt{3}}{25} < 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} -\frac{12\sqrt{3}}{25} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2\sqrt{3}}{5} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{12\sqrt{3}}{25} \right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{5} \right) - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{3}{5} > 0 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES ALTERNAM DE SINAL DE-
TANDO DO PADRÃO DE CONCAVIDADE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA NEGA-
TIVA E, SENDO ASSIM, O PONTO CRÍTICO $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3} \right)$ É UM PONTO DE MÁ-
XIMO LOCAL DA FUNÇÃO.

7.7 $3x^4 + 3x^2y - y^3$

$$f'_x = 12x^3 + 6xy = 0$$

$$f'_y = 3x^2 - 3y^2 = 0$$

$$\begin{cases} 12x^3 + 6xy = 0 \\ 3x^2 - 3y = 0 \end{cases} \quad x \neq 4x$$

$$\sim \begin{cases} 12x^3 + 6xy = 0 \\ -12x^3 + 12xy = 0 \end{cases}$$

$$18xy = 0$$

$$x = \frac{0}{18y}$$

$$= 0$$

PARA $x=0$

4.A

$$Y = \frac{0}{18x}$$

$$= \frac{0}{18(0)}$$

$$= 0$$

$$f''_{xx} = 36x^2 + 6y$$

$$f''_{xy} = 6x$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = -6y$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36x^2 + 6y & 6x \\ 6x & -6y \end{bmatrix}$$

NO PONTO CRÍTICO $(0,0)$

$$H = \begin{bmatrix} 36(0)^2 + 6(0) & 6(0) \\ 6(0) & -6(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ENCONTRANDO OS VALORES PRINCIPAIS LÍQUENES:

$$\Delta_1 = |0|$$

$$= 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

UMA VEZ QUE TODOS OS VALORES PRINCIPAIS SÃO IGUAIS A ZERO NÃO HÁ COMO CLASSIFICAR O PONTO CRÍTICO $(0,0)$

7.5 $x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 27z$

$$f'_x = 2x + 6y - 10 = 0 \quad f'_y = 6x + 2y - 3z - 5 = 0$$

$$f'_z = -3y + 8z - 27 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 6y - 10 = 0 \\ -3y + 8z - 27 = 0 \\ 6x + 2y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$2x + 6y - 10 = 0$$

$$-3y + 8z - 27 = 0$$

$$x = 5 - 3\left(\frac{8}{3}z - 7\right)$$

$$2x + 6y = 10$$

$$3y = 8z - 27$$

$$= 5 - 8z + 21$$

$$2x = 10 - 6y$$

$$y = \frac{8}{3}z - 7$$

$$= 26 - 8z$$

$$x = 5 - 3y$$

$$6(26 - 8z) + 2\left(\frac{8}{3}z - 7\right) - 3z - 5 = 0$$

$$156 - 48z + \frac{16}{3}z - 14 - 3z - 5 = 0$$

$$468 - 144z + 16z - 42 - 9z - 15 = 0$$

~~78~~

$$411 - 137z = 0$$

$$-137z = -411$$

$$z = \frac{-411}{-137}$$

$$= 3$$

$$\therefore x = 26 - 8(3) \quad \therefore y = \frac{8}{3} \cdot 3 - 7$$

$$= 26 - 24$$

$$= 8 - 7$$

$$= 2$$

$$= 1$$

$$f''_{xx} = 2 \quad f''_{xy} = 6 \quad f''_{xz} = 0$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad f''_{yy} = 2 \quad f''_{yz} = -3$$

$$f''_{zx} = f''_{xz} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad f''_{zy} = f''_{yz} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad f''_{zz} = 8$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LIGERES:

$$\begin{aligned} D_1 &= |2| \\ &= 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2) \cdot (2) - (6) \cdot (6) \\ &= 4 - 36 \\ &= -32 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= 2[(2)(8) - (-3)(-3)] - 6[(6)(8) - (-3)(0)] \\ &= 2(16 - 9) - 6(48 - 0) \\ &= 2(7) - 6(48) \\ &= 14 - 288 \\ &= -274 < 0 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE OS MEMORES PRINCIPAIS LÍDERES NÃO ENCAIXAM NO PADRÃO DE CONVEXIDADE/CONCAVIDADE NÃO HÁ COMO CLASSIFICAR O PONTO CRÍTICO $(2, 7, 3)$.

$$\textcircled{1.F} \quad y = x^3 + 3$$

$$f'_x = 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{3}$$

$$x = 0$$

$$f''_x = 6x$$

PARA O PONTO CRÍTICO $x = 0$

$$\begin{aligned} f''_x &= 6 \cdot (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

TESTE DA m-ÉSIMA DERIVADA:

$$f'''_x = 6$$

COMO $m = 3$ IMPLICA QUE O PONTO CRÍTICO $x = 0$ É UM PONTO DE INFLEXÃO.

1.6 $y = (x-2)^4$

$$f'_x = 4(x-2)^3 = 0$$

$$4(x-2)^3 = 0$$

$$(x-2)^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{(x-2)^3} = \sqrt[3]{0}$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$f''_x = 12 \cdot (x-2)^2$$

PARA O PONTO CRÍTICO $x=2$ TEM-SE QUE:

$$f''_x = 12 \cdot (2-2)^2$$

$$= 12 \cdot (0)^2$$

$$= 0$$

TESTE DA M-ÉSIMA DERIVADA:

$$f^3_x = 24 \cdot (x-2) \text{ PARA } x=2 \quad f^3_x = 0$$

$$f^4_x = 24 > 0$$

UMA VEZ QUE m É PAR E $f^m(x_0) > 0$ IMPLICA QUE O PONTO CRÍTICO $x=2$ É UM PONTO DE MÍNIMO LOCAL.

EXERCÍCIO 2:

$$Z = x^{1/4} \cdot y^{1/4}$$

$L = R - D$ EM QUE: L Z, LUCRO R Z, RECEITA D Z, DESPESA

LISTA VI MATEMÁTICA I

2013 17-0

(7)

$$\begin{aligned} L &= Z \cdot P - (P_x \cdot X + P_y \cdot Y) \\ &= (X^{1/4} \cdot Y^{1/4}) \cdot (1) - (4X + 4Y) \\ &= X^{1/4} \cdot Y^{1/4} - 4X - 4Y \end{aligned}$$

$$L'_X = \frac{1}{4} \cdot X^{-3/4} \cdot Y^{1/4} - 4 = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot X^{-3/4} \cdot Y^{1/4} - 4 = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot X^{-3/4} \cdot Y^{1/4} = 4$$

$$X^{-3/4} \cdot Y^{1/4} = 16$$

$$Y^{1/4} = \frac{16}{X^{-3/4}}$$

$$Y^{1/4} = 16 \cdot X^{3/4}$$

$$Y = (16 \cdot X^{3/4})^4$$

$$Y = 16^4 \cdot X^3$$

$$Y = 16^4 \cdot (16^4 \cdot Y^3)^3$$

$$Y = 16^4 \cdot 16^{12} \cdot Y^9$$

$$Y = 16^{16} \cdot Y^9$$

$$\frac{Y}{Y^9} = 16^{16}$$

$$Y^{-8} = 16^{16}$$

$$Y = (16^{16})^{-1/8}$$

$$= 16^{-2}$$

$$L'_Y = \frac{1}{4} \cdot X^{1/4} \cdot Y^{-3/4} - 4 = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot X^{1/4} \cdot Y^{-3/4} - 4 = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot X^{1/4} \cdot Y^{-3/4} = 4$$

$$X^{1/4} \cdot Y^{-3/4} = 16$$

$$X^{1/4} = \frac{16}{Y^{-3/4}}$$

$$X^{1/4} = 16 \cdot Y^{3/4}$$

$$X = (16 \cdot Y^{3/4})^4$$

$$X = 16^4 \cdot Y^3$$

$$X = 16^4 \cdot (16^{-2})^3$$

$$= 16^4 \cdot 16^{-6}$$

$$= 16^{-2}$$

$$f''_{xx} = -\frac{3}{16} \cdot x^{-7/4} \cdot y^{1/4}$$

$$f''_{xy} = \frac{1}{16} \cdot x^{-3/4} \cdot y^{-3/4}$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \text{ Z) PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = -\frac{3}{16} \cdot x^{1/4} \cdot y^{-7/4}$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \cdot x^{-7/4} \cdot y^{1/4} & \frac{1}{16} \cdot x^{-3/4} \cdot y^{-3/4} \\ \frac{1}{16} \cdot x^{-3/4} \cdot y^{-3/4} & -\frac{3}{16} \cdot x^{1/4} \cdot y^{-7/4} \end{bmatrix}$$

NO PONTO CRÍTICO $(16^{-2}, 16^{-2})$:

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \cdot (16^{-2})^{-7/4} \cdot (16^{-2})^{1/4} & \frac{1}{16} \cdot (16^{-2})^{-3/4} \cdot (16^{-2})^{-3/4} \\ \frac{1}{16} \cdot (16^{-2})^{-3/4} \cdot (16^{-2})^{-3/4} & -\frac{3}{16} \cdot (16^{-2})^{1/4} \cdot (16^{-2})^{-7/4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -768 & 256 \\ 256 & -768 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MEMORES PRINCIPAIS LÍNEARES:

$$\lambda_1 = 1 - 7681 \\ = -768 < 0$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} -768 & 256 \\ 256 & -768 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-768) \cdot (-768) - (256 \cdot 256) \\ &= 589.824 - 65.536 \\ &= 524.288 > 0 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE OS MEMBROS PRINCIPAIS LÍNEARES ALTERNAM DE SINAL NO PADRÃO DE CONVEXIDADE/CONCAVIDADE IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA NEGATIVA E, PORTANTO, O PONTO CRÍTICO $(16^{-2}, 16^{-2})$ É UM PONTO DE MÁXIMO GLOBAL DA FUNÇÃO.

EXERCÍCIO 3:

$$Z = x^a \cdot y^b$$

$$L = R - D$$

EM QUE: $L \geq$ LUCRO $R \geq$ RECEITA $D \geq$ DESPESA

$$L = Z \cdot P - (P_x \cdot X + P_y \cdot Y)$$

$$= x^a \cdot y^b \cdot P - w \cdot x - r \cdot y$$

$$I'_x = a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot P - w = 0 \quad I'_y = b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \cdot P - r = 0$$

$$a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot P - w = 0$$

$$a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot P = w$$

$$y^b = \frac{w}{a \cdot x^{a-1} \cdot P}$$

$$y^b = a^{-1} \cdot x^{1-a} \cdot P^{-1} \cdot w$$

$$y = (a^{-1} \cdot x^{1-a} \cdot P^{-1} \cdot w)^{\frac{1}{b}}$$

$$b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \cdot P - r = 0$$

$$b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \cdot P = r$$

$$x^a = \frac{r}{b \cdot y^{b-1} \cdot P}$$

$$x^a = b^{-1} \cdot y^{1-b} \cdot P^{-1} \cdot r$$

$$x = (b^{-1} \cdot y^{1-b} \cdot P^{-1} \cdot r)^{\frac{1}{a}}$$

$$y = \{ a^{-1} \cdot [(b^{-1} \cdot y^{1-b} \cdot P^{-1} \cdot r)^{\frac{1}{a}}]^{1-a} \cdot P^{-1} \cdot w \}^{\frac{1}{b}}$$

8A

EXERCÍCIO 4:

4.A $\Pi = \boxed{P \cdot X}$ em que: P é, preço do bem X
 Q é, QUANTIDADE VENDIDA DO BEM X

4.B $\Pi = R - D$
 $= P \cdot X - \frac{1}{3} X^3 + 7X^2 - 117X - 50$
 $= (100 - X) \cdot X - \frac{1}{3} X^3 + 7X^2 - 117X - 50$

$= 100X - X^2 - \frac{1}{3} X^3 + 7X^2 - 117X - 50$

$\boxed{= -\frac{1}{3} X^3 + 6X^2 - 17X - 50}$

4.C $P'_X = -X^2 + 12X - 17 = 0$

$-X^2 + 12X - 17 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (12)^2 - 4(-1)(-17)$

$= 144 - 68$

$= 76$

$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-12 \pm \sqrt{76}}{2(-1)}$

$= \frac{-12 \pm 10}{-2}$ $\nearrow 1$
 $\searrow 11$

$P''_X = -2X + 12$

PARA $x=1$

$$\begin{aligned} f''_x &= -2(1) + 12 \\ &= -2 + 12 \\ &= 10 > 0 \end{aligned}$$

PARA $x=11$

$$\begin{aligned} f''_x &= -2(11) + 12 \\ &= -22 + 12 \\ &= -10 < 0 \end{aligned}$$

(9.9)

PARA SER UM PONTO DE MÁXIMO A SEGUNDA DERIVADA TEM DE SER MENOR QUE ZERO, LOGO, O NÍVEL DE PRODUÇÃO QUE MAXIMIZA O LUCRO É $x=11$.

ENCONTRANDO O LUCRO MÁXIMO:

$$\pi = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 11x - 50$$

$$= -\frac{1}{3}(11)^3 + 6(11)^2 - 11(11) - 50$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 1331 + 6 \cdot 121 - 121 - 50$$

$$= -443,7 + 726 - 171$$

$$= 111,3$$

EXERCÍCIO 5:

(5.9) $\pi = R - D$ EM QUE: π Z, LUCRO R Z, RECEITA D Z, DESPESA

$$= P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 - 30 + 10(x_1 + x_2)$$

$$= (100 - 10x_1) \cdot x_1 + (200 - 20x_2) \cdot x_2 - (30 + 10x_1 + 10x_2)$$

$$= 100x_1 - 10x_1^2 + 200x_2 - 20x_2^2 - 30 - 10x_1 - 10x_2$$

$$= 90x_1 - 10x_1^2 + 190x_2 - 20x_2^2 - 30$$

$$f'_{x_1} = 90 - 20x_1 = 0$$

$$f'_{x_2} = 190 - 40x_2 = 0$$

$$90 - 20x_1 = 0$$

$$190 - 40x_2 = 0$$

$$20x_1 = 90$$

$$40x_2 = 190$$

$$x_1 = 4,5$$

$$x_2 = 4,75$$

$$f''_{x_1 x_1} = -20$$

$$f''_{x_1 x_2} = 0$$

$$f''_{x_2 x_1} = f''_{x_1 x_2} \text{ PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{x_2 x_2} = -40$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -40 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MEMBRES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= |-20| \\ &= -20 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \begin{vmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix} \\ &= (-20) \cdot (-40) - (0) \cdot (0) \\ &= 800 - 0 \\ &= 800 > 0 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE OS MEMBRES PRINCIPAIS LÍDERES ALTERNAM DE SINAL OBEDECENDO O PADRÃO DE CONVEXIDADE/CONCAVIDADE IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA NEGATIVA E, PORTANTO, O PONTO CRÍTICO $(4,5; 4,75)$ É UM PONTO DE MÁXIMO.

$$\begin{aligned} \text{5.3) } x &= x_1 + x_2 \\ &= 10 - \frac{p_1}{10} + 10 - \frac{p_2}{20} \\ &= 20 - \frac{p}{10} - \frac{p}{20} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} x &= 20 - \frac{2p - p}{20} \\ x &= 20 - \frac{3p}{20} \\ 20x &= 400 - 3p \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3p &= 400 - 20x \\ p &= \frac{400 - 20x}{3} \end{aligned}$$

10.1

$\pi = \pi_X - D$ em que: $\pi =$ LUCRO $\pi =$ RECEITA $D =$ DESPESA

$$= P \cdot X - (30 + 10X)$$

$$= \left(\frac{400 - 20X}{3} \right) \cdot X - 30 - 10X$$

$$= \frac{400X - 20X^2}{3} - 30 - 10X$$

$$\pi = \frac{400X - 20X^2 - 90 - 30X}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (370X - 20X^2 - 90)$$

$$\pi'_X = \frac{1}{3} \cdot (370 - 40X) = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot (370 - 40X) = 0$$

$$370 - 40X = 0$$

$$40X = 370$$

$$X = \frac{370}{40}$$

$$X = \frac{37}{4}$$

CALCULANDO O LUCRO MÁXIMO SEM DISCRIMINAÇÃO:

$$\pi'_S = \frac{1}{3} \cdot (370X - 20X^2 - 90)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[370 \cdot \left(\frac{37}{4} \right) - 20 \cdot \left(\frac{37}{4} \right)^2 - 90 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{13.690}{4} - 20 \cdot \left(\frac{1.369}{16} \right) - 90 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{13.690}{4} - \frac{27.380}{16} - 90 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{54.760 - 27.380 - 1.440}{16} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{25.940}{16} \right)$$

$$= \frac{25.940}{48}$$

$$= 540,4$$

CALCULANDO O LUCRO MÁXIMO COM DISCRIMINAÇÃO:

$$\pi_c = 90x_1 - 10x_1^2 + 190x_2 - 20x_2^2 - 30$$

$$= 90(4,5) - 10(4,5)^2 + 190(4,75) - 20(4,75)^2 - 30$$

$$= 405 - 10(20,25) + 902,5 - 20(22,56) - 30$$

$$= 405 - 202,5 + 902,5 - 451,2 - 30$$

$$= 623,8$$

A MELHOR SITUAÇÃO PARA A FIRMA MONOPOLISTA SERIA A DISCRIMINAÇÃO DE PREÇOS CONSIDERANDO AS DEMANDAS INDIVIDUAIS DE CADA MERCADO, POIS O LUCRO É MAIOR - $\pi_c > \pi_s$.

EXERCÍCIO 6:

$$\pi = x_1(10 - x_1) + x_2(16 - x_2) - [10 + (x_1 + x_2)^2]$$

$$= 10x_1 - x_1^2 + 16x_2 - x_2^2 - (10 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$$= 10x_1 - x_1^2 + 16x_2 - x_2^2 - 10 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$= 10x_1 - 2x_1^2 + 16x_2 - 2x_2^2 - 10 - 2x_1x_2$$

$$1'_{x_1} = 10 - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$1'_{x_2} = 16 - 4x_2 - 2x_1 = 0$$

$$\begin{cases} 10 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 16 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \times (-2) \quad \begin{cases} -20 + 8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 16 - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$-4 + 6x_1 = 0$$

$$\text{PARA } x_1 = \frac{2}{3}$$

$$6x_1 = 4$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

$$16 - 2\left(\frac{2}{3}\right) - 4x_2 = 0$$

$$16 - \frac{4}{3} - 4x_2 = 0$$

$$\frac{48 - 4 - 12x_2 = 0}{3}$$

$$-12x_2 = -44$$

$$x_2 = \frac{11}{3}$$

CONFERIAM-SE AS CONDIÇÕES SUFICIENTES:

(11.9)

$$f''_{x_1 x_1} = -4$$

$$f''_{x_1 x_2} = -2$$

$$f''_{x_2 x_1} = f''_{x_1 x_2} \text{ Z, PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{x_2 x_2} = -4$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS DETERMINANTES PRINCIPAIS LÍDERES:

$$\begin{aligned} D_1 &= |-4| \\ &= -4 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (-4) \cdot (-4) - [(-2) \cdot (-2)] \\ &= 16 - 4 \\ &= 12 > 0 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE OS DETERMINANTES PRINCIPAIS LÍDERES ALTERNAM DE SINAL OBSERVANDO O PADRÃO DA CONVEXIDADE/CONCAVIDADE IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA NEGATIVA E, PORTANTO, O PONTO CRÍTICO $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ É UM PONTO DE MÁXIMO GLOBAL DA FUNÇÃO.

CALCULANDO OS PREÇOS A SEEN COORDADOS:

$$\begin{aligned} P_1 &= 10 - x_1 \\ &= 10 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{30 - 2}{3} \end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{28}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= 16 - x_2 \\ &= 16 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{48 - 2}{3} \end{aligned}$$

$$P_2 = \frac{46}{3}$$

EXERCÍCIO 7:

$$\begin{aligned}
 f'_{x_i} &= 2(Y_i - a - bx_i) \cdot (Y_i - a - bx_i)' \\
 &= 2(Y_i - a - bx_i) \cdot (-b) \\
 &= -2bY_i + 2ab + 2b^2x_i = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_{x_i} &= 2(Y_i - a - bx_i) \cdot (Y_i - a - bx_i)' \\
 &= 2(Y_i - a - bx_i) \cdot (1) \\
 &= 2Y_i - 2a - 2bx_i = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2bY_i + 2ab + 2b^2x_i = 0 \\ 2Y_i - 2a - 2bx_i = 0 \end{cases} \times (b) \sim \begin{cases} -2bY_i + 2ab + 2b^2x_i = 0 \\ 2bY_i - 2ab - 2b^2x_i = 0 \end{cases}$$

12.A

EXERCÍCIO 8:

(P.A) $f(x, y) = x \cdot y$ s. a $x + 2y = 2$

$$g(x, y) = x + 2y - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} g'_x = 1 \therefore g'_x(x^*) \neq 0 \\ g'_y = 2 \therefore g'_y(x^*) \neq 0 \end{array} \right\} \text{PORTANTO, A RESTRIÇÃO É QUALIFICADA.}$$

Montando a Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda(2 - x - 2y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0 \therefore \lambda = y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 2\lambda = 0 \therefore \lambda = \frac{1}{2} \cdot x \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2 - x - 2y = 0 \therefore x + 2y = 2 \quad (3)$$

IGUALANDO (1) E (2) TEM-SE QUE:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x$$

$$x = 2y$$

(4)

SUBSTITUINDO (4) EM (3) OBTÉM-SE:

$$2y + 2y = 2$$

$$4y = 2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

(5)

SUBSTITUINDO (5) EM (4) TEM-SE QUE:

(13.9)

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{= 1}$$

SUBSTITUINDO (5) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}} \quad \therefore \lambda > 0$$

PORTANTO, O PONTO CRÍTICO É DADO POR:

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$l''_{xx} = 0 \quad l''_{xy} = 1$$

$$l''_{yx} = l''_{xy} \text{ 2, PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$l'''_{xy} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & l''_{xx} & l''_{xy} \\ g'_y & l''_{xy} & l''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$m=1$
 $m=2$ } SENDO ASSIM, DEVE-SE AVALIAR
 $n-m = 2-1 = 1$ MEMBROS PRINCIPAIS LÍDERES.

CALCULANDO O MEMBRO PRINCIPAL NA MATRIZ HESSIANA:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_2 = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13}$$

$$= (0) \cdot \Delta_{11} + (1) \cdot (-1)^3 \cdot \Delta_{12} + (2) \cdot (-1)^4 \cdot \Delta_{13}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) [(1) \cdot (0) - (1) \cdot (2)] + (2) [(1) \cdot (1) - (0) \cdot (2)]$$

$$= (-1)(0 - 2) + (2)(1 - 0)$$

$$= (-1) \cdot (-2) + (2) \cdot (1)$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4 > 0$$

$$(-1)^m B_2 \Rightarrow (-1)^1 B_2 < 0$$

$$(-1)^n B_2 \Rightarrow (-1)^2 B_2 > 0$$

UMA VEZ QUE B_2 TEM O MESMO SINAL $(-1)^m B_m$ INDICA QUE O PONTO CRÍTICO $(x^*, y^*, \lambda^*) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ É UM PONTO DE MÁXIMO LOCAL RESTRIITO.

8.3 $f(x, y) = x(y+2)$ S. A $x+y=6$

$$g(x, y) = x + y - 6$$

$$\left. \begin{array}{l} g'_x = 1 \therefore g'_x(x^*) \neq 0 \\ g'_y = 1 \therefore g'_y(x^*) \neq 0 \end{array} \right\} \text{PORTANTO, A RESTRIÇÃO É QUALIFICADA}$$

Montando a Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x(y+2) + \lambda(6 - x - y)$$

(1) 4.9

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 2 - \lambda = 0 \therefore \lambda = y + 2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0 \therefore x = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 6 - x - y = 0 \therefore x + y = 6$$

IGUALANDO AS EQUAÇÕES (1) E (2) TEM-SE QUE:

$$y + 2 = x$$

$$x = y + 2$$

SUBSTITUINDO (4) EM (3) OBTÉM-SE:

$$y + 2 + y = 6$$

$$2y = 6 - 2$$

$$2y = 4$$

$$\boxed{y = 2}$$

SUBSTITUINDO (5) EM (4) OBTÉM-SE:

$$x = 2 + 2$$

$$\boxed{x = 4}$$

SUBSTITUINDO (6) EM (2) TEM-SE QUE:

$$\boxed{\lambda = 4}$$

PORTANTO, O PONTO CRÍTICO É DADO POR:

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = (4, 2, 4)$$

$$f''_{xx} = 0 \quad f''_{xy} = 1$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \gg \text{PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & l''_{xx} & l''_{xy} \\ g'_y & l''_{xy} & l''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$m=1$
 $m=2$ } SENDO ASSIM, DEVE-SE AVALIAR
 $m-m=2-1=1$ MEMORES PRINCIPAIS
LÍDERES.

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13}$$

$$= (0) \cdot (-1)^2 \cdot \Delta_{11} + (1) \cdot (-1)^3 \cdot \Delta_{12} + (1) \cdot (-1)^4 \cdot \Delta_{13}$$

$$= (-1) \cdot \Delta_{12} + (1) \cdot \Delta_{13}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [(1) \cdot (0) - (1) \cdot (1)] + (1) \cdot [(1) \cdot (1) - (0) \cdot (1)]$$

$$= (-1) \cdot (0 - 1) + (1) \cdot (1 - 0)$$

$$= (-1) \cdot (-1) + (1) \cdot (1)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2 > 0$$

$$(-1)^m \beta_2 \Rightarrow (-1)^1 \beta_2 < 0$$

$$(-1)^m \beta_2 \Rightarrow (-1)^2 \beta_2 > 0$$

UMA VEZ QUE OS $m-m$ MEMORES PRINCIPAIS TÊM O MESMO SINAL DE

$(-1) \nabla B_2$ IMPLICA QUE O PONTO CRÍTICO $(x^*, y^*, \lambda^*) = (4, 2, 4)$ É UM PONTO DE MÁXIMO LOCAL RESTRITO. 13.A

P.C $f(x, y, z) = x + 2y + 3z + xy - yz$ s. a $x + y + 2z = 10$

$$g(x, y, z) = x + y + 2z - 10$$

$$\left. \begin{array}{l} g'_x = 1 \quad \therefore g'_x(\tilde{x}^*) \neq 0 \\ g'_y = 1 \quad \therefore g'_y(\tilde{x}^*) \neq 0 \\ g'_z = 2 \quad \therefore g'_z(\tilde{x}^*) \neq 0 \end{array} \right\} \text{PORTANTO, A RESTRIÇÃO É QUALIFICADA.}$$

PORTANTO A LAGRANGIANA:

$$d(x, y, \lambda) = x + 2y + 3z + xy - yz + \lambda(10 - x - y - 2z)$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} = 1 + y - \lambda = 0 \quad \therefore \lambda = 1 + y \quad (1)$$

$$\frac{\partial d}{\partial y} = 2 + x - z - \lambda = 0 \quad \therefore \lambda = 2 + x - z \quad (2)$$

$$\frac{\partial d}{\partial z} = 3 - y - 2\lambda = 0 \quad \therefore \lambda = \frac{3 - y}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial d}{\partial \lambda} = 10 - x - y - 2z = 0 \quad \therefore x + y + 2z = 10 \quad (4)$$

IGUALANDO (1) E (3) TEM-SE QUE:

$$1 + y = \frac{3 - y}{2}$$

$$2 + 2y = 3 - y$$

$$2y + y = 3 - 2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}}$$

(3)

LISTA VI MATEMÁTICA I

2013/11.º

(16)

SUBSTITUINDO (3) EM (1) TEM-SE QUE:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3+1}{3}$$

$$\boxed{= \frac{4}{3}}$$

(6)

SUBSTITUINDO (6) EM (2) OBTÉM-SE:

$$\frac{4}{3} = 2 + x - 2$$

$$x - 2 = \frac{4}{3} - 2$$

$$x = \frac{4-6}{3} + 2$$

$$x = 2 - \frac{2}{3}$$

(7)

SUBSTITUINDO (3) E (7) EM (4) TEM-SE QUE:

$$2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 2z = 10$$

$$3z - \frac{1}{3} = 10$$

$$3z = 10 + \frac{1}{3}$$

$$9z = 30 + 1$$

$$\boxed{z = \frac{31}{9}}$$

(8)

SUBSTITUINDO (8) EM (7) OBTÉM-SE:

$$x = \frac{31}{9} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{31-6}{9}$$

$$\boxed{x = \frac{25}{9}}$$

PORTANTO, O PONTO CRÍTICO É DADO POR:

(176.1)

$$(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = \left(\frac{23}{9}, \frac{1}{3}, \frac{37}{9}, \frac{4}{3} \right)$$

$$l''_{xx} = 0 \quad l''_{xy} = 1 \quad l''_{xz} = 0$$

$$l''_{yx} = l''_{xy} \text{ (PELO TEOREMA DE YOUNG)} \quad l''_{yy} = 0 \quad l''_{yz} = -1$$

$$l''_{zx} = l''_{xz} \text{ (PELO TEOREMA DE YOUNG)} \quad l''_{zy} = l''_{yz} \text{ (PELO TEOREMA DE YOUNG)} \quad l''_{zz} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & l''_{xx} & l''_{xy} & l''_{xz} \\ g'_y & l''_{xy} & l''_{yy} & l''_{yz} \\ g'_z & l''_{xz} & l''_{yz} & l''_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} m=1 \\ m=3 \end{matrix} \}$$

SENDO ASSIM, DEVE-SE AVALIAR
 $m - m = 3 - 1 = 2$ MENORES PRINCIPAIS LÍDERES.

$$B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (1) \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (2) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (1) \cdot (-1) [(1) \cdot (-1) - (2) \cdot (1)] + (-2) \cdot (1) [(1) \cdot (-1) - (2) \cdot (1)] \\
 &= (-1) \cdot (-1 - 2) + (-2) \cdot (-1 - 2) \\
 &= (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot (-3) \\
 &= 3 + 6 \\
 &= 9 > 0
 \end{aligned}$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13} \\
 &= (0) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} + (1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} + (1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{13} \\
 &= (1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (1) \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1) \cdot [(1) \cdot (0) - (1) \cdot (1)] + (1) \cdot [(1) \cdot (1) - (0) \cdot (1)] \\
 &= (-1) \cdot (0 - 1) + (1) \cdot (1 - 0) \\
 &= (-1) \cdot (-1) + (1) \cdot (1) \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2 > 0
 \end{aligned}$$

$$(-1)^m B_3 \Rightarrow (-1)^9 B_3 < 0$$

$$(-1)^m B_2 \Rightarrow (-1)^9 B_2 < 0$$

$$(-1)^n B_3 \Rightarrow (-1)^3 B_3 < 0$$

$$(-1)^n B_2 \Rightarrow (-1)^2 B_2 > 0$$

UMA VEZ QUE OS SINAIS DOS $m-m$ MENORES PRINCIPAIS LÍDERES NÃO SE ENCAIXAM NO PADRÃO $(-1)^m B$ E $(-1)^n B$ CONCLUI-SE QUE ESTE PONTO CRÍTICO $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = \left(\frac{25}{9}, \frac{1}{3}, \frac{31}{9}, \frac{4}{3}\right)$ É UM PONTO DE INFLEXÃO.

(8.7) $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + yz^2$ S. A $2x + y + z^2 = 24$
 $x + z = 8$

$$g = 2x + y + z^2 - 24$$

$$h = x + z - 8$$

$$g'_x = 2 \therefore g'_x(x^*) \neq 0$$

$$g'_y = 1 \therefore g'_y(x^*) \neq 0$$

$$g'_z = 2z \therefore z \neq 0 \text{ PARA QUE } g'_z(x^*) \neq 0 \text{ E A RESTRIÇÃO SEJA QUALIFI-}$$

CADA

$$h'_x = 1 \therefore h'_x(x^*) \neq 0$$

$$h'_y = 1 \therefore h'_y(x^*) \neq 0$$

SENDO ASSIM,

g E h SÃO QUALIFICADAS.

PORTANTO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2xy + yz^2 + \lambda_1(24 - 2x - y - z^2) + \lambda_2(8 - x - z)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + 2y - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2x + z^2 - \lambda_1 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2yz - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 24 - 2x - y - z^2 = 0 \quad (4)$$

LISTA VI MATEMÁTICA I

2013/14^o

(18)

$$\frac{\partial d}{\partial x} = d - x - z = 0$$

(5)

(17.19)

LISTA VI MATEMÁTICA I
2013/14^o

19

(J.F) $f(x, y, z) = yz + xz$ s. a $y^2 + z^2 = 1$
 $xz = 3$

19.A

$$g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1$$

$$g'_x = 0 \therefore g'(\underline{x}^*) = 0$$

$$g'_y = 2y \therefore y \neq 0 \text{ PARA QUE } g'_y(\underline{x}^*) \neq 0$$

$$g'_z = 2z \therefore z \neq 0 \text{ PARA QUE } g'_z(\underline{x}^*) \neq 0$$

$$h(x, y, z) = xz - 3$$

$$h'_x = z \therefore z \neq 0 \text{ PARA QUE } h'_x(\underline{x}^*) \neq 0$$

$$h'_y = 0 \therefore h'(\underline{x}^*) = 0$$

$$h'_z = x \therefore x \neq 0 \text{ PARA QUE } h'_z(\underline{x}^*) \neq 0$$

MONTANDO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = yz + xz + \lambda_1(1 - y^2 - z^2) + \lambda_2(3 - xz)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = z - \lambda_2 \cdot z = 0 \therefore \lambda_2 \cdot z = z \therefore \lambda_2 = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = z - 2\lambda_1 \cdot y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = y + x - 2\lambda_1 z - \lambda_2 x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 1 - y^2 - z^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 3 - xz = 0 \quad (5)$$

SUBSTITUINDO (1) EM (3) TEM-SE QUE:

$$Y + X - 2 \cdot \lambda_1 Z - X = 0$$

$$Y - 2 \cdot \lambda_1 Z = 0$$

$$2 \lambda_1 Z = Y$$

$$2 \lambda_1 = \frac{Y}{Z}$$

(6)

SUBSTITUINDO (6) EM (2) OBTÉM-SE:

$$Z - \frac{Y \cdot Y}{Z} = 0$$

$$Z - \frac{Y^2}{Z} = 0$$

$$\frac{Z^2 - Y^2}{Z} = 0$$

$$Z^2 - Y^2 = 0$$

$$Z^2 = Y^2$$

(7)

SUBSTITUINDO (7) EM (4) TEM-SE QUE:

$$1 - Z^2 - Z^2 = 0$$

$$1 - 2Z^2 = 0$$

$$2Z^2 = 1$$

$$Z^2 = \frac{1}{2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(8)

SABE-SE QUE $Z^2 = \frac{1}{2}$, ENTÃO, SUBSTITUINDO EM (7) TEM-SE:

$$Y^2 = \frac{1}{2}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{Y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(9)

PARA $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ TEM-SE QUE:

20.9

$$3 - xz = 0$$

$$3 - x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\frac{6 - x\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} &= 6 \\ x &= \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{2} \\ &= \pm 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(90)

SUBSTITUINDO (8) E (9) EM (2) OBTÉM-SE:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\lambda_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}$$

(99)

PONTOS CRÍTICOS:

$$(x^*, y^*, z^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$(x^{**}, y^{**}, z^{**}, \lambda_1^{**}, \lambda_2^{**}) = \left(-3\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

LISTA VI MATEMÁTICA I
2013/14^o

27

EXERCÍCIO 9:

$$u(x, y) = (x+2) \cdot (y+1)$$

$$= xy + x + 2y + 2$$

$$s. \quad A \quad p_x \cdot x + p_y \cdot y = m$$

9.A MONTANDO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + x + 2y + 2 + \lambda(m - p_x \cdot x - p_y \cdot y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 1 - \lambda \cdot p_x = 0 \therefore \lambda = \frac{y+1}{p_x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + 2 - \lambda \cdot p_y = 0 \therefore \lambda = \frac{x+2}{p_y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_x \cdot x - p_y \cdot y = 0 \therefore m = p_x \cdot x + p_y \cdot y \quad (3)$$

IGUALANDO (1) E (2) TEM-SE QUE:

$$\frac{y+1}{p_x} = \frac{x+2}{p_y}$$

$$y+1 = \frac{p_x}{p_y} \cdot (x+2)$$

$$y = \left[\frac{p_x}{p_y} \cdot (x+2) \right] - 1 \quad (4)$$

SUBSTITUINDO (4) EM (3) OBTÉM-SE:

$$m = p_x \cdot x + p_y \cdot \left\{ \left[\frac{p_x}{p_y} \cdot (x+2) \right] - 1 \right\}$$

$$m = p_x \cdot x + p_x \cdot \left[\frac{p_x}{p_y} \cdot (x+2) \right] - p_y$$

$$m = p_x \cdot x + p_x \cdot (x+2) - p_y$$

$$m = p_x \cdot x + p_x \cdot x + 2p_x - p_y$$

$$m = 2P_x \cdot X + 2P_x - P_y$$

$$2P_x \cdot X = m - 2P_x + P_y$$

$$X = \frac{m}{2P_x} - 1 + \frac{P_y}{2P_x}$$

(5)

SUBSTITUINDO (5) EM (4) TEM-SE QUE:

$$Y = \left[\frac{P_x}{P_y} \cdot \left(\frac{m}{2P_x} - 1 + \frac{P_y}{2P_x} + 2 \right) \right] - 1$$

$$= \frac{m}{2P_y} - \frac{P_x}{P_y} + \frac{1}{2} + \frac{2P_x}{P_y} - 1$$

$$= \frac{m}{2P_y} + \frac{P_x}{P_y} - \frac{1}{2}$$

(6)

SUBSTITUINDO (5) EM (2) OBTÉM-SE:

$$\frac{m}{2P_x} + \frac{P_y}{2P_x} - 1 + 2 - \lambda \cdot P_y = 0$$

$$\frac{m + P_y - 2P_x + 4P_x - 2\lambda \cdot P_x \cdot P_y}{2P_x} = 0$$

$$m + P_y + 2P_x - 2\lambda \cdot P_x \cdot P_y = 0$$

$$2\lambda \cdot P_x \cdot P_y = m + P_y + 2P_x$$

$$\lambda = \frac{m + P_y + 2P_x}{2P_x \cdot P_y}$$

(7)

LOGO, O PONTO CRÍTICO É DADO POR:

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\frac{m - 2P_x + P_y}{2P_x}, \frac{m - 2P_x - P_y}{2P_y}, \frac{m + P_y + 2P_x}{2P_x \cdot P_y} \right)$$

9.3

$$I''_{xx} = 0$$

$$I''_{xy} = 1$$

22.1

$$I''_{yx} = I''_{xy} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$I''_{yy} = 0$$

$$g'_x = p_x$$

$$g'_y = p_y$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & I''_{xx} & I''_{xy} \\ g'_y & I''_{xy} & I''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & 0 & 1 \\ p_y & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$m = 2$ Z, NÚMERO DE VARIÁVEIS

$m = 1$ Z, NÚMERO DE RESTRIÇÕES

$m - m = 2 - 1 = 1$. OU SEJA, DEVE-SE ANALISAR 1 MENOR PRINCIPAL LÍDER.

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & 0 & 1 \\ p_y & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13}$$

$$= (0) \cdot (-1)^2 \cdot \Delta_{11} + p_x \cdot (-1)^3 \cdot \Delta_{12} + p_y \cdot (-1)^4 \cdot \Delta_{13}$$

$$= (-p_x) \begin{vmatrix} p_x & 1 \\ p_y & 0 \end{vmatrix} + (p_y) \begin{vmatrix} p_x & 0 \\ p_y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-p_x) \cdot [(p_x) \cdot (0) - (1) \cdot (p_y)] + (p_y) \cdot [(p_x) \cdot (1) - (0) \cdot (p_y)]$$

$$= (-p_x) \cdot (0 - p_y) + (p_y) \cdot (p_x - 0)$$

$$= (-p_x) \cdot (-p_y) + (p_y) \cdot (p_x)$$

$$= p_x \cdot p_y + p_x \cdot p_y$$

$$= 2 p_x \cdot p_y > 0 \quad \text{PARA } p_x \text{ E } p_y > 0$$

2013/14

$$(-1)^m B_2 \Rightarrow (-1)^1 B_2 < 0$$

$$(-1)^n B_2 \Rightarrow (-1)^2 B_2 > 0$$

UMA VEZ QUE O SINAL DE $(-1)^n B_n$ É O MESMO DO DETERMINANTE DA MATRIZ HESSIANA ORLA DA IMPLICA QUE A CONDIÇÃO DE SEGUNDA ORDEM PARA UM MÁXIMO FOI SATISFEITA.

(9.C)

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$= (0) \cdot (-1)^2 \cdot A_{11} + (2) \cdot (-1)^3 \cdot A_{12} + (5) \cdot (-1)^4 \cdot A_{13}$$

$$= (2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (5) \cdot (1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot [(2) \cdot (0) - (1) \cdot (5)] + (5) \cdot [(2) \cdot (1) - (0) \cdot (5)]$$

$$= (-2) \cdot (0 - 5) + (5) \cdot (2 - 0)$$

$$= (-2) \cdot (-5) + (5) \cdot (2)$$

$$= 10 + 10$$

$$= 20 > 0$$

CONFIANDO QUE O PONTO CRÍTICO $(x^*, y^*, \lambda^*) = (13; 4, 2; 3)$ É UM PONTO DE MÁXIMO RESTRIÇÃO.

EXERCÍCIO 10:

(10.A) $\mathcal{J}(x, y) = p_x \cdot x + p_y \cdot y - m$

$$\mathcal{J}'_x = p_x \therefore \mathcal{J}'_x(x^*) \neq 0 \text{ PARA } p_x > 0$$

$$y'_y = p_y \therefore y'_y(x^*) \neq 0 \text{ PARA } p_y > 0$$

SENDO ASSIM, A RESTRIÇÃO É QUALIFICADA PARA p_x E $p_y > 0$.

10.3 PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE - PMU

$$\max x^a y^b \quad \text{s. a } p_x \cdot x + p_y \cdot y = m$$

$$x, y \geq 0$$

MONTANDO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^a y^b + \lambda (m - p_x \cdot x - p_y \cdot y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = a \cdot x^{a-1} y^b - \lambda \cdot p_x = 0 \therefore \lambda = \frac{a \cdot x^{a-1} y^b}{p_x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = b \cdot x^a y^{b-1} - \lambda \cdot p_y = 0 \therefore \lambda = \frac{b \cdot x^a y^{b-1}}{p_y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = m - p_x \cdot x - p_y \cdot y = 0 \therefore m = p_x \cdot x + p_y \cdot y \quad (3)$$

IGUALANDO AS EXPRESSÕES (1) E (2) TEM-SE QUE:

$$\frac{a \cdot x^{a-1} y^b}{p_x} = \frac{b \cdot x^a y^{b-1}}{p_y}$$

$$\frac{y^b}{y^{b-1}} = \frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{x^a}{x^{a-1}}$$

$$y = \frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{b}{a} \cdot x \quad (4)$$

SUBSTITUINDO (4) NA RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA OBTÉM-SE:

$$m = p_x \cdot x + p_y \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{b}{a} \cdot x$$

$$m = p_x \cdot x + p_x \cdot x \cdot \frac{b}{a}$$

$$m = P_x \cdot X \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \quad \rightarrow \quad a \cdot m = P_x \cdot X$$

$$m = P_x \cdot X \cdot \left(\frac{a+b}{a}\right)$$

$$m = P_x \cdot X \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$$

$$X = \frac{a \cdot m}{P_x}$$

(3)

SUBSTITUINDO (3) EM (4) TEM-SE QUE:

$$Y = \frac{P_x^a}{P_y} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a \cdot m}{P_x}$$

$$= \frac{b \cdot m}{P_y}$$

(6)

SUBSTITUINDO (3) E (6) NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$$u(X, Y) = \left(\frac{a \cdot m}{P_x}\right)^a \left(\frac{b \cdot m}{P_y}\right)^b$$

$$= \left(\frac{a}{P_x}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{P_y}\right)^b \cdot m^a \cdot m^b$$

$$= m^{a+b} \cdot \left(\frac{a}{P_x}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{P_y}\right)^b$$

$$= m \cdot \left(\frac{a}{P_x}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{P_y}\right)^b$$

ENCONTRANDO A UTILIDADE MARGINAL DA RENDA (λ^*):

$$\lambda^* = \frac{\partial u}{\partial m}$$

$$= \left(\frac{a}{P_x}\right)^a \cdot \left(\frac{b}{P_y}\right)^b$$

CONDIÇÕES DE SEGUNDA ORDEM:

24.A

$$f''_{xx} = a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^b$$

$$f''_{xy} = a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1}$$

$$f''_{yx} = f''_{xy} \text{ pelo TEOREMA DE YOUNG}$$

$$f''_{yy} = b(b-1) \cdot x^a \cdot y^{b-2}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & f'_x & f'_y \\ f'_x & f''_{xx} & f''_{xy} \\ f'_y & f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^b & a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \\ p_y & a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} & b(b-1) \cdot x^a \cdot y^{b-2} \end{bmatrix}$$

$n=2$ $\hookrightarrow$ NÚMERO DE VARIÁVEIS

$m=1$ $\hookrightarrow$ NÚMERO DE RESTRIÇÕES

$n-m = 2-1 = 1$. OU SEJA, DEVE-SE ANALISAR 1 MENOR PRINCIPAL LÍDER.

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y \\ p_x & a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^b & a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \\ p_y & a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} & b(b-1) \cdot x^a \cdot y^{b-2} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13}$$

$$= (0) \cdot (-1)^2 \cdot \Delta_{11} + (p_x) \cdot (-1)^3 \cdot \Delta_{12} + (p_y) \cdot (-1)^4 \cdot \Delta_{13}$$

$$= (p_x) \cdot (-1) \begin{vmatrix} p_x & a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \\ p_y & b(b-1) \cdot x^a \cdot y^{b-2} \end{vmatrix} + (p_y) \cdot (1) \begin{vmatrix} p_x & a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^b \\ p_y & a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-p_x) \cdot [p_x \cdot b(b-1) \cdot x^a \cdot y^{b-2} - p_y \cdot a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1}] + (p_y) \cdot [p_x \cdot a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} - p_y \cdot a(a-1) \cdot x^{a-2} \cdot y^b]$$

$$\begin{aligned}
 |B_2| &= -b \cdot (b-1) \cdot P_x^2 \cdot x^a \cdot y^{b-2} + P_x \cdot P_y \cdot a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \\
 &\quad + P_x \cdot P_y \cdot a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} - a \cdot (a-1) \cdot P_y^2 \cdot x^{a-2} \cdot y^2 \\
 &= -b \cdot (b-1) \cdot P_x^2 \cdot x^a \cdot y^{b-2} + 2a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} - a \cdot (a-1) \cdot P_y^2 \cdot x^{a-2} \cdot y^2 \\
 &= -b \cdot (-a) \cdot P_x^2 \cdot x^a \cdot y^{b-2} + 2a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} - a \cdot (-b) \cdot P_y^2 \cdot x^{a-2} \cdot y^2 \\
 &= a \cdot b \cdot P_x^2 \cdot x^a \cdot y^{b-2} + 2a \cdot b \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} + a \cdot b \cdot P_y^2 \cdot x^{a-2} \cdot y^2 \\
 &= a \cdot b (P_x^2 \cdot x^a \cdot y^{b-2} + 2x^{a-1} \cdot y^{b-1} + P_y^2 \cdot x^{a-2} \cdot y^2)
 \end{aligned}$$

SABE-SE QUE PARA MAXIMIZAR IMPLICA QUE $(-1)^n B_n(x^*) > 0$, OU SEJA, $(-1)^2 B_2(x^*) > 0$. SENDO ASSIM, $B_2 > 0$ E HAJÁ VISTO QUE a E b ESTÃO MULTIPLICANDO TODA A EXPRESSÃO DO DETERMINANTE DA MATRIZ HESSIANA OLCADA IMPLICA QUE ESSES (a E b) DEVEM SER POSITIVO PARA QUE B_2 SEJA POSITIVO.

10.C PROBLEMA DA MINIMIZAÇÃO DA DESPESA - PMD

$$\begin{aligned}
 \min P_x \cdot X + P_y \cdot Y \quad \text{s. a} \quad u(X, Y) = X^a \cdot Y^b = \bar{u} \\
 X \text{ E } Y \geq 0
 \end{aligned}$$

Montando a Lagrangiana:

$$L(X, Y, \lambda) = P_x \cdot X + P_y \cdot Y - \lambda \cdot (u(X, Y) - \bar{u} = 0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = P_x - a \cdot \lambda \cdot X^{a-1} \cdot Y^b = 0 \therefore \lambda = \frac{P_x}{a \cdot X^{a-1} \cdot Y^b} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = P_y - b \cdot \lambda \cdot X^a \cdot Y^{b-1} = 0 \therefore \lambda = \frac{P_y}{b \cdot \lambda \cdot X^a \cdot Y^{b-1}} \quad (2)$$

IGUALANDO AS EQUAÇÕES (1) E (2) OBTÉM-SE:

$$\frac{P_x}{a \cdot X^{a-1} \cdot Y^b} = \frac{P_y}{b \cdot \lambda \cdot X^a \cdot Y^{b-1}}$$

$$\frac{x^a}{x^{a-1}} = \frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{y^b}{y^{b-1}}$$

(25.A)

$$x = \frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \cdot y$$

(3)

SUBSTITUINDO (3) NA DEFINIÇÃO TEM-SE QUE:

$$\bar{u} = \left(\frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \cdot y \right)^a \cdot y^b$$

$$\bar{u} = \left(\frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \right)^a \cdot y^a \cdot y^b$$

$$\bar{u} = \left(\frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \right)^a \cdot y^{a+b}$$

$$\bar{u} = \left(\frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \right)^a \cdot y$$

$$y = \bar{u} \cdot \left(\frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{b}{a} \right)^a$$

(4)

SUBSTITUINDO (4) EM (3) TEM-SE QUE:

$$x = \frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \cdot \bar{u} \cdot \left(\frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{b}{a} \right)^a$$

$$= p_y \cdot p_x^{-1} \cdot a \cdot b^{-1} \cdot \bar{u} \cdot p_x^a \cdot p_y^{-a} \cdot b^a \cdot a^{-a}$$

$$= \bar{u} \cdot p_x^{-1+a} \cdot p_y^{1-a} \cdot a^{1-a} \cdot b^{-1+a}$$

$$= \bar{u} \cdot p_x^{-(1-a)} \cdot p_y^{1-a} \cdot a^{1-a} \cdot b^{-(1-a)}$$

$$= \bar{u} \cdot p_x^{-b} \cdot p_y^b \cdot a^b \cdot b^{-b}$$

$$= \bar{u} \cdot \left(\frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{a}{b} \right)^b$$

(5)

CONDIÇÕES DE SEGUNDA ORDEM:

$$p''_{xx} = -a \cdot (a-1) \cdot \lambda \cdot x^{a-2} \cdot y^b$$

$$p''_{xy} = -a \cdot b \cdot \lambda \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1}$$

$$p''_{yx} = p''_{xy} \text{ Z), PELO TEOREMA DE YOUNG}$$

$$p''_{yy} = -b \cdot (b-1) \cdot \lambda \cdot x^a \cdot y^{b-2}$$

$$g(x, y) = x^a \cdot y^b$$

$$g'_x = a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \quad \therefore g'_x(x^*) \neq 0$$

$$g'_y = b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \quad \therefore g'_y(x^*) \neq 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & g''_{xx} & g''_{xy} \\ g'_y & g''_{xy} & g''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \\ a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & -a(a-1) \cdot 1 \cdot x^{a-2} \cdot y^b & -a \cdot b \cdot 1 \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} \\ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} & -a \cdot b \cdot 1 \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-2} & -b(b-1) \cdot 1 \cdot x^a \cdot y^{b-2} \end{bmatrix}$$

$m = 2 \Rightarrow$ NÚMERO DE VARIÁVEIS

$m = 1 \Rightarrow$ NÚMERO DE RESTRIÇÕES

$m - m = 2 - 1 = 1$. OU SEJA, DEVE-SE ANALISAR 1 MENOR PRINCIPAL LÍDER.

$$- \cancel{a} \cdot (a-1) \cdot \frac{P_x}{\cancel{a} \cdot \cancel{x^{a-1}} \cdot y^b} \cdot \cancel{x^{a-2}} \cdot y^b = -(a-1) \cdot P_x \cdot x^{-1}$$

$$- \cancel{a} \cdot b \cdot \frac{P_x}{\cancel{a} \cdot \cancel{x^{a-1}} \cdot y^b} \cdot \cancel{x^{a-1}} \cdot y^{b-1} = -b \cdot P_x \cdot y^{-1}$$

$$- \cancel{b} \cdot (b-1) \cdot \frac{P_y}{\cancel{b} \cdot 1 \cdot \cancel{x^a} \cdot y^{b-1}} \cdot \cancel{x^a} \cdot y^{b-2} = -(b-1) \cdot P_y \cdot y^{-1}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \\ a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & -(a-1) \cdot P_x \cdot x^{-1} & -b \cdot P_x \cdot y^{-1} \\ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} & -b \cdot P_x \cdot y^{-1} & -(b-1) \cdot P_y \cdot y^{-1} \end{bmatrix}$$

(26.A)

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \\ a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & -(a-1) \cdot P_x \cdot x^{-1} & -b \cdot P_x \cdot y^{-1} \\ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} & -b \cdot P_x \cdot y^{-1} & -(b-1) \cdot P_y \cdot y^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$= (0) \cdot (-1)^2 \cdot A_{11} + (a \cdot x^{a-1} \cdot y^b) \cdot (-1)^3 \cdot A_{12} + (b \cdot x^a \cdot y^{b-1}) \cdot (-1)^4 \cdot A_{13}$$

$$= (a \cdot x^{a-1} \cdot y^b) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & -b \cdot P_x \cdot y^{-1} \\ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} & -(b-1) \cdot P_y \cdot y^{-1} \end{vmatrix} +$$

$$+ (b \cdot x^a \cdot y^{b-1}) \cdot (1) \begin{vmatrix} a \cdot x^{a-1} \cdot y^b & -(a-1) \cdot P_x \cdot x^{-1} \\ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} & -b \cdot P_x \cdot y^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= -a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot \{ (a \cdot x^{a-1} \cdot y^b) \cdot [-(b-1) \cdot P_y \cdot y^{-1}] - [(-b \cdot P_x \cdot y^{-1}) \cdot (b \cdot x^a \cdot y^{b-1})] \}$$

$$+ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \cdot \{ (a \cdot x^{a-1} \cdot y^b) \cdot (-b \cdot P_x \cdot y^{-1}) - [-(a-1) \cdot P_x \cdot x^{-1}] \cdot b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \}$$

$$= -a \cdot x^{a-1} \cdot y^b \cdot [-a(b-1) \cdot P_y \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} + b^2 \cdot P_x \cdot x^a \cdot y^{b-2}] +$$

$$+ b \cdot x^a \cdot y^{b-1} \cdot [-a \cdot b \cdot P_x \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1} + b \cdot (a-1) \cdot P_x \cdot x^{a-1} \cdot y^{b-1}]$$

$$= a^2 \cdot (b-1) \cdot P_y \cdot x^{2a-2} \cdot y^{2b-1} - a \cdot b^2 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2} -$$

$$- a \cdot b^2 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2} - b^2 \cdot (a-1) \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2}$$

$$= a^2 \cdot (b-1) \cdot P_y \cdot x^{2a-2} \cdot y^{2b-1} - 2a \cdot b^2 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2} +$$

$$+ b^2 \cdot (a-1) \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2}$$

$$= -a^3 \cdot P_y \cdot x^{2a-2} \cdot y^{2b-1} - 2a \cdot b^2 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2} - b^3 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2}$$

$$= (-1)(a^3 \cdot P_y \cdot x^{2a-2} \cdot y^{2b-1} + 2a \cdot b^2 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2} + b^3 \cdot P_x \cdot x^{2a-1} \cdot y^{2b-2})$$

SABE-SE QUE PARA MINIMIZAR IMPLICA QUE $(-1)^m \cdot B_m(\tilde{x}^*) > 0$, OU SEJA, $(-1)^1 \cdot B_2(\tilde{x}^*) > 0$. SENDO ASSIM, $B_2 < 0$ E HAJA VISTO QUE QUE A EXPRESSÃO DO DETERMINANTE DA MATRIZ HESSIANA DADA ESTÁ MULTIPLICADA POR MENOS UM IMPLICA QUE a E b DEVEM SER MAIORES QUE ZERO PARA QUE B_2 SEJA NEGATIVO.

27.9