LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

EXERCÍCIO 1:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO.

$\pi_1 = 1$ (R$) LUCRO UNITÁRIO DO BEM 1

$\pi_2 = 1,5$ (R$) LUCRO UNITÁRIO DO BEM 2

$\pi_3 = 2$ (R$) LUCRO UNITÁRIO DO BEM 3

$\Pi = x_1 + 1,5x_2 + 2x_3$ EM QUE Π É O LUCRO TOTAL E x_1, x_2 E x_3 SÃO AS QUANTIDADES DE CADA BEM.

$$\max \Pi = x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 \quad \text{S. A} \quad \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 400 \\ 0,7x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \end{cases}$$

RESOLVENDO PELO MÉTODO SIMPLEX (POIS SÃO TRÊS VARIÁVEIS - n^3)

PRIMEIRAMENTE INTRODUZ AS VARIÁVEIS DE FOLGA PARA QUE AS RESTRIÇÕES POSSAM SER ATENDIDAS NA IGUALDADE. ENTÃO,

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 + s_1 = 120 \\ 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 + s_2 = 400 \\ 0,7x_1 + x_2 + 2x_3 + s_3 = 80 \end{cases}$$

AGORA INTRODUZ AS VARIÁVEIS IMPLÍCITAS PARA PODER MONTAR O QUADRO SIMPLEX.

$$\begin{cases} \Pi - x_1 - 1,5x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0 \\ 0\Pi + 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 + s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 120 \\ 0\Pi + 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 0s_1 + s_2 + 0s_3 = 400 \\ 0\Pi + 0,7x_1 + x_2 + 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 80 \end{cases}$$

QUADRO SIMPLEX 1:

(1.A)

	π	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	-1	-1,5	-2	0	0	0	0
LINHA 1	0	8	5	2	1	0	0	120
LINHA 2	0	5	10	4	0	1	0	400
LINHA 3	0	0,7	1	(2)	0	0	1	80

COLUNA PIVÔ: x_3

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{120}{2}, \frac{400}{4}, \frac{80}{2}\right\} \therefore \min\{60, 100, 40\}$$

PORTANTO, O ELEMENTO PIVÔ É 2 NA LINHA 3.

QUADRO SIMPLEX 2:

	π	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	-0,3	-0,5	0	0	0	1	80
LINHA 1	0	7,3	(4)	0	1	0	-1	40
LINHA 2	0	3,6	8	0	0	1	-2	240
LINHA 3	0	0,35	0,5	1	0	0	0,5	40

COLUNA PIVÔ: x_2

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{40}{4}, \frac{240}{8}, \frac{40}{0,5}\right\} \therefore \min\{10, 30, 80\}$$

PORTANTO, O ELEMENTO PIVÔ É 4 NA LINHA 1.

QUADRO SIMPLEX 3:

	π	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	0,6125	0	0	0,125	0	0,875	(85)
LINHA 1	0	1,825	1	0	0,25	0	-0,25	10
LINHA 2	0	-11	0	0	-2	1	0	160
LINHA 3	0	-0,5625	0	1	-0,125	0	0,625	35

Z MÁXIMO

LOGO,

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1, s_2, s_3) = (0, 10, 35, 0, 160, 0)$$

LUCRO MÁXIMO

$$\max \pi = x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3$$
$$= 0 + 1{,}5(10) + 2(35)$$
$$= 85$$

PORTANTO, CONCLUI-SE QUE O LUCRO MÁXIMO DE 85 FOI OBTIDO COM UMA FOLGA NA RESTRIÇÃO 2 DE 160. SENDO QUE AS RESTRIÇÕES 1 E 3 FORAM ATENDIDAS NA IGUALDADE, ISTO É, SEM FOLGA.

EXERCÍCIO 2:

$\pi_1 = 180$ → LUCRO DO BEM 1

$\pi_2 = 300$ → LUCRO DO BEM 2

COMPONENTES	COMPUTADOR 1	COMPUTADOR 2	TOTAL
GABINETE PEQUENO	1	—	60
GABINETE GRANDE	—	1	50
UNIDADES DE DISCO	1	2	120

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO

$\pi = 180x_1 + 300x_2$ EM QUE π É O LUCRO TOTAL E x_1 E x_2 SÃO AS QUANTIDADES DE CADA BEM.

$$\max \pi = 180x_1 + 300x_2 \quad \text{S. A} \quad x_1 \leq 60$$
$$x_2 \leq 50$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

RESOLVENDO PELO MÉTODO SIMPLEX (MAS PODERIA SER RESOLVIDO GRAFICAMENTE, POIS É n^2) (2.A)

PRIMEIRAMENTE INTRODUZ AS VARIÁVEIS DE FOLGA PARA QUE AS RESTRIÇÕES POSSAM SER ATENDIDAS NA IGUALDADE. ENTÃO,

$$x_1 + s_1 = 60$$

$$x_2 + s_2 = 50$$

$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 120$$

AGORA INTRODUZ AS VARIÁVEIS IMPLÍCITAS PARA PODER MONTAR O QUADRO SIMPLEX.

$$\pi - 180x_1 - 300x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$$

$$0\pi + x_1 + 0x_2 + s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 60$$

$$0\pi + 0x_1 + x_2 + 0s_1 + s_2 + 0s_3 = 50$$

$$0\pi + x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 120$$

QUADRO SIMPLEX 1:

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	-180	-300	0	0	0	0
LINHA 1	0	1	0	1	0	0	60
LINHA 2	0	0	(1)	0	1	0	50
LINHA 3	0	1	2	0	0	1	120

COLUNA PIVÔ: x_2

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{50}{1}, \frac{120}{2}\right\} \therefore \min\{50, 60\}$$

PORTANTO, O ELEMENTO PIVÔ É 1 NA LINHA 2.

QUADRO SIMPLEX 2:

LISTA VII MATEMÁTICA I

2017/1-0

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	-180	0	0	300	0	15.000
LINHA 1	0	1	0	1	0	0	60
LINHA 2	0	0	1	0	1	0	50
LINHA 3	0	(1)	0	0	-2	1	20

COLUNA PIVÔ: x_1

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{60}{1}, \frac{20}{1}\right\} \therefore \min\{60, 20\}$$

PORTANTO O ELEMENTO PIVÔ É 1 NA LINHA 3.

QUADRO SIMPLEX 3:

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	0	0	0	-60	180	18.600
LINHA 1	0	0	0	1	2	-1	40
LINHA 2	0	0	1	0	1	0	50
LINHA 3	0	1	0	0	-2	1	20

COLUNA PIVÔ: s_2

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{40}{2}, \frac{50}{1}\right\} \therefore \min\{20, 50\}$$

PORTANTO O ELEMENTO PIVÔ É 2 NA LINHA 1.

QUADRO SIMPLEX 4:

	π	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
LINHA 0	1	0	0	30	0	150	(19.800)
LINHA 1	0	0	0	0,5	1	-0,5	20
LINHA 2	0	0	1	-0,5	0	0,5	30
LINHA 3	0	1	0	1	0	0	60

2, MÁXIMO

ESSE EXERCÍCIO CONTINUA NA PÁGINA 43.A

EXERCÍCIO 3:

3.A

$\pi_1 = 30$ z, LUCRO DO JOGO 1

$\pi_2 = 40$ z, LUCRO DO JOGO 2

SEÇÃO	JOGO 1	JOGO 2	CAPACIDADE
CONFECÇÃO	3	5	50

$\pi = 30x_1 + 40x_2$ EM QUE π É O LUCRO TOTAL E x_1 E x_2 SÃO AS QUANTIDADES DE CADA BEM.

$\max \pi = 30x_1 + 40x_2$ S A $3x_1 + 5x_2 \leq 50$

RESOLVENDO PELO MÉTODO SIMPLEX (MAS PODERIA SER RESOLVIDO GRAFICAMENTE, POIS É n^2)

PRIMEIRAMENTE INTRODUZ AS VARIÁVEIS DE FOLGA PARA QUE AS RESTRIÇÕES POSSAM SER ATENDIDAS NA IGUALDADE. ENTÃO,

$$3x_1 + 5x_2 + s_1 = 50$$

AGORA INTRODUZ AS VARIÁVEIS IMPLÍCITAS PARA PODER MONTAR O QUADRO SIMPLEX.

$\pi - 30x_1 - 40x_2 + 0s_1 = 0$

$0\pi + 3x_1 + 5x_2 + s_1 = 50$

QUADRO SIMPLEX 1:

	π	x_1	x_2	s_1	b
LINHA 0	1	-30	-40	0	0
LINHA 1	0	3	(5)	1	50

COLUNA PIVÔ: x_2

NESSE CASO, COM UMA RESTRIÇÃO, O ELEMENTO PIVÔ É 5 NA LINHA 1.

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

(4)

QUADRO SIMPLEX 2:

	π	x_1	x_2	s_1	b
LINHA 0	1	-6	0	8	400
LINHA 1	0	(0,6)	1	0,2	10

COLUNA PIVÔ: x_2

NESSE CASO, O ELEMENTO PIVÔ É 0,6 NA LINHA 1.

QUADRO SIMPLEX 3:

	π	x_1	x_2	s_1	b
LINHA 0	1	0	10	10	(500) ← MÁXIMO
LINHA 1	0	1	1,7	0,3	16,7

LOGO,

$(x_1^*, x_2^*, s_1) = (16,7; 0; 0)$

LUCRO MÁXIMO,

$\pi = 30x_1 + 40x_2$

$= 30(16,7) + 40(0)$

$= \$500$

PORTANTO, CONCLUI-SE QUE O LUCRO MÁXIMO DE $500 FOI OBTIDO SEM FOLGA NA RESTRIÇÃO, ISTO É, A RESTRIÇÃO FOI ATENDIDA NA IGUALDADE.

EXERCÍCIO 4:

D → EMPRESA DIVERSIFICADA

N → EMPRESA NÃO DIVERSIFICADA

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO. (4.A)

$\Pi = 0,12D + 0,2N$ EM QUE Π É O LUCRO TOTAL E D E N SÃO AS QUANTIDADES INVESTIDAS EM CADA EMPRESA.

$\max \Pi = 0,12D + 0,2N$ S. A $D \leq 270.000$

$N \leq 150.000$

$0,4D + N \leq 180.000$

$0,6D \leq 180.000$

$D + N \leq 300.000$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE (POIS É Nº E POSSUI MUITAS RESTRIÇÕES)

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$D = 270.000 = 9$

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$N = 150.000 = 5$

RESTRIÇÃO 3 (R3):

$0,4D + N = 180.000$

SE $D = 0 \therefore N = 180.000 = 6$

SE $N = 0 \therefore D = 450.000 = 15$

$N = 180.000 - 0,4D$

INCLINAÇÃO: $-0,4$

RESTRIÇÃO 4 (R4):

$0,6D = 180.000$

$D = 300.000 = 10$

RESTRIÇÃO 5 (R5):

$D + N = 300.000$

SE $D = 0 \therefore N = 300.000 = 10$

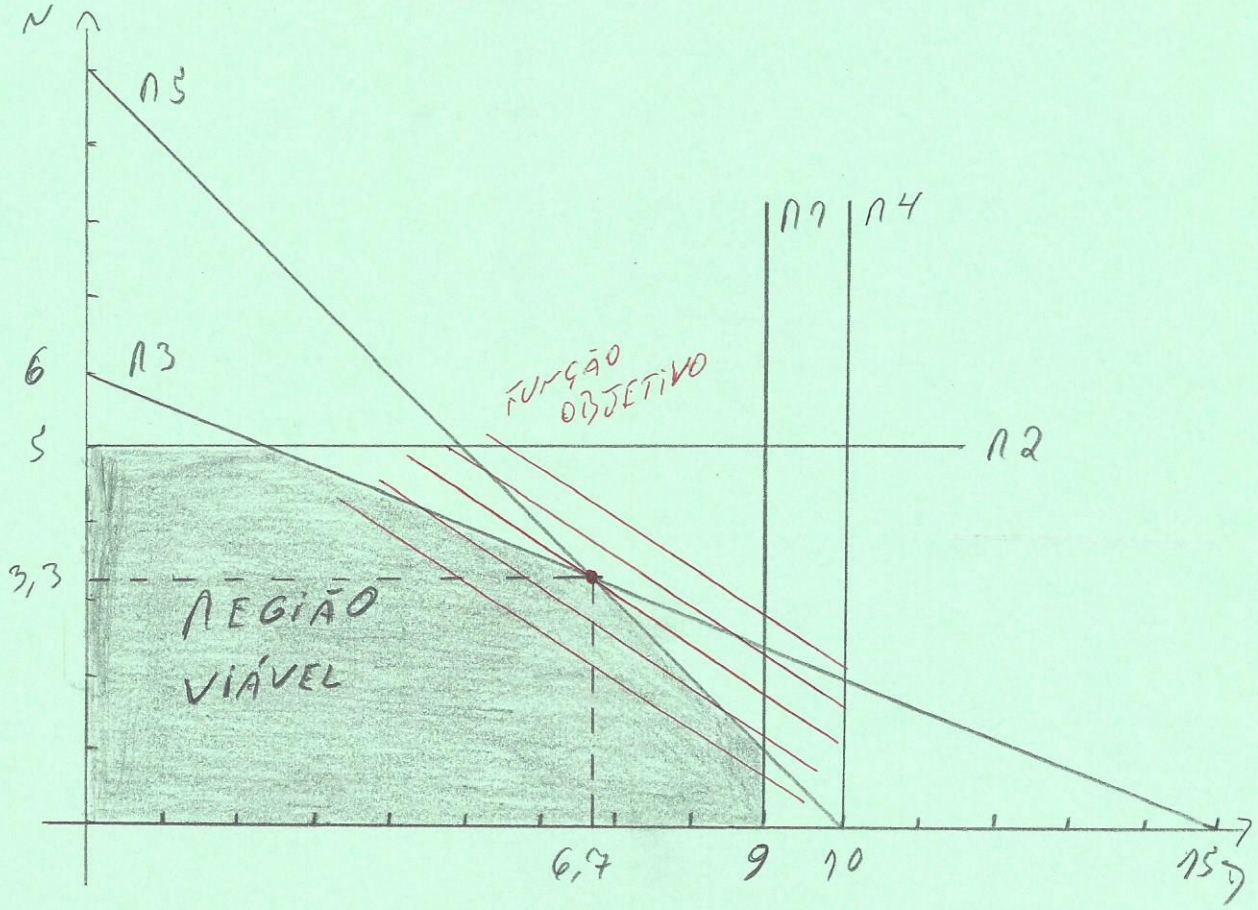
$N = 300.000 - D$

SE $N = 0 \therefore D = 300.000 = 10$

INCLINAÇÃO: -1

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º



FUNÇÃO OBJETIVO:

$\pi = 0,12D + 0,2N$

$0,2N = \pi - 0,12D$

$N = 5\pi - 0,6D$

INCLINAÇÃO: $-0,6$

CALCULANDO O PONTO ÓTIMO:

COMO O PONTO ÓTIMO LOCALIZA-SE NA INTERSECÇÃO DAS RESTRIÇÕES R3 E R5 UTILIZAMÁ ESSAS RESTRIÇÕES PARA SE OBTEM OS VALORES DE D E N.

$$\begin{cases} 0,4D + N = 180.000 \times (-1) \\ D + N = 300.000 \end{cases} \sim \begin{cases} -0,4D - N = -180.000 \\ D + N = 300.000 \end{cases}$$

$0,6D = 120.000$

$D = 200.000 \therefore N = 100.000$

$\hookrightarrow = 6,7$ $\hookrightarrow = 3,3$

(5.A)

SENDO ASSIM,

$(D^*, N^*) = (200.000, 100.000)$

LUCRO MÁXIMO,

$\max \Pi = 0,12D + 0,2N$

$= 0,12(200.000) + 0,2(100.000)$

$= 44.000$

EXERCÍCIO 5:

INSUMOS	MILHO	ALGODÃO	CAPACIDADE
HOMENS	30	60	3.600
TRATOR	4	2	240
PRODUÇÃO (EM TONELADAS)	200	180	-

$P_1 = 1.700$ ⇒ PREÇO DO MILHO POR TONELADA

$P_2 = 2.040$ ⇒ PREÇO DO ALGODÃO POR TONELADA

$\Pi = 1.700x_1 + 2.040x_2$ EM QUE Π É O LUCRO TOTAL E x_1 E x_2 SÃO AS QUANTIDADES DE CADA CULTURA.

$\max \Pi = 1.700x_1 + 2.040x_2$ S.A $30x_1 + 60x_2 \leq 3.600$

$4x_1 + 2x_2 \leq 240$

$x_1 \leq 200$

$x_2 \leq 180$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE (POIS É $\mathbb{R}^2$ E POSSUI MUITAS RESTRIÇÕES)

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1): SE $x_1 = 0 \therefore x_2 = 60 \Rightarrow$ INCLINAÇÃO: $-0,5$

$30x_1 + 60x_2 = 3.600$ SE $x_2 = 0 \therefore x_1 = 120 \Rightarrow 2$

$x_2 = 60 - 0,5x_1$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1-0

RESTRIÇÃO 2 (R2):

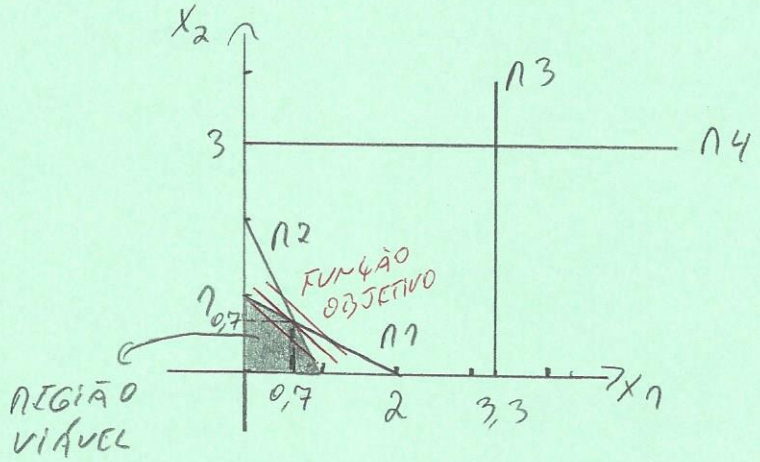
$4X_1 + 2X_2 = 240$ SE $X_1 = 0 \therefore X_2 = 120 = 2$

$2X_2 = 240 - 4X_1$ $X_2 = 0 \therefore X_1 = 60 = 1$

$X_2 = 120 - 2X_1$ INCLINAÇÃO: -2

RESTRIÇÃO 3 (R3): $X_1 = 200 = 3,3$

RESTRIÇÃO 4 (R4): $X_2 = 180 = 3$



FUNÇÃO OBJETIVO:

$\Pi = 1.700X_1 + 2.040X_2$ INCLINAÇÃO: -0,83

$2.040X_2 = \Pi - 1.700X_1$

$X_2 = \frac{1}{2.040}\Pi - 0,83X_1$

CALCULANDO O PONTO ÓTIMO:

COMO O PONTO ÓTIMO LOCALIZA-SE NA INTERSECÇÃO DAS CURVAS DE RESTRIÇÃO R1 E R2 UTILIZAREMOS ESSAS RESTRIÇÕES PARA SE OBTER OS VALORES DE X_1 E X_2.

$$\begin{cases} 30X_1 + 60X_2 = 3.600 \\ 4X_1 + 2X_2 = 240 \quad x(-7,5) \end{cases} \sim \begin{cases} 30X_1 + 60X_2 = 3.600 \\ -30X_1 - 15X_2 = -1.800 \end{cases}$$

$45X_2 = 1.800$

$X_2 = 40 \therefore X_1 = 40$

↳ = 0,7 0,7 = ↲

SENDO ASSIM,

$(x_1^*, x_2^*) = (40, 40)$

LUCRO MÁXIMO,

$\max \pi = 1.700x_1 + 2.040x_2$

$= 1.700(40) + 2.040(40)$

$= 149.600$

EXERCÍCIO 6:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO

$\pi = 600x_1 + 1.200x_2 + 250x_3 + 3.200x_4$

S. A $6.000x_1 + 5.000x_2 + 5.000x_3 + 10.000x_4 \leq 24.000$

$25x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 120x_4 \leq 240$

RESOLVENDO PELO MÉTODO SIMPLEX (POIS SÃO QUATRO VARIÁVEIS - n^4)

PRIMEIRAMENTE INTRODUZ AS VARIÁVEIS DE FOLGA PARA QUE AS RESTRIÇÕES POSSAM SER ATENDIDAS NA IGUALDADE.

$6.000x_1 + 5.000x_2 + 5.000x_3 + 10.000x_4 + s_1 = 24.000$

$25x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 120x_4 + s_2 = 240$

AGORA INTRODUZ AS VARIÁVEIS IMPLÍCITAS PARA PODER MONTAR O QUADRO SIMPLEX.

$\pi - 600x_1 - 1.200x_2 - 250x_3 - 3.200x_4 + 0s_1 + 0s_2 = 0$

$0\pi + 6.000x_1 + 5.000x_2 + 5.000x_3 + 10.000x_4 + s_1 + 0s_2 = 24.000$

$0\pi + 25x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 120x_4 + 0s_1 + s_2 = 240$

QUADRO SIMPLEX 1:

	π	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b	
LINHA 0	1	-600	-1.200	-250	-3.200	0	0	0	COLUNA PIVÔ:
LINHA 1	0	6.000	5.000	5.000	10.000	1	0	24.000	x_4
LINHA 2	0	25	40	10	(120)	0	1	240	

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1-º

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{24.000}{10.000}, \frac{240}{120}\right\} \therefore \min\{2,4; 2\}$$

PORTANTO, O ELEMENTO PIVÔ É 120 NA LINHA 2.

QUADRO SIMPLEX 2:

	π	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
LINHA 0	1	66,7	-133,3	16,7	0	0	26,7	6.400
LINHA 1	0	3.916,7	1.666,7	4.166,7	0	1	-83,3	4.000
LINHA 2	0	0,2	0,3	0,08	1	0	0,008	2

COLUNA PIVÔ: x_2

SELECIONANDO O ELEMENTO PIVÔ:

$$\min\left\{\frac{4.000}{1.666,7}, \frac{2}{0,3}\right\} \therefore \min\{2,4; 6,7\}$$

PORTANTO, O ELEMENTO PIVÔ É 1.666,7 NA LINHA 1.

QUADRO SIMPLEX 3:

	π	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
LINHA 0	1	380	0	350	0	0,08	20	(6.720) ← MÁXIMO
LINHA 1	0	2,3	1	2,5	0	0	-0,05	2,4
LINHA 2	0	-0,5	0	-97	1	0	0,02	1,2

LOGO,

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, s_1, s_2) = (0; 2,4; 0; 1,2, 0, 0)$$

RENDA MÁXIMA,

$$\max \pi = 600x_1 + 1.200x_2 + 250x_3 + 3.200x_4$$

$$= 600(0) + 1.200(2,4) + 250(0) + 3.200(1,2)$$

$$= 6.720$$

EXERCÍCIO 7:

PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DE CUSTO

$C_A = 0,2$ → CUSTO DA NAÇÃO A

$C_B = 0,3$ → CUSTO DA NAÇÃO B

$C_C = 0,4$ → CUSTO DA NAÇÃO C

$C_D = 0,3$ → CUSTO DA NAÇÃO D

$C_E = 0,25$ → CUSTO DA NAÇÃO E

$$\min C = 0,2X_A + 0,3X_B + 0,4X_C + 0,3X_D + 0,25X_E$$

S. A $\quad 30X_A + 20X_B + 15X_C + 80X_D + 20X_E \geq 80$

$60X_A + 20X_B + 60X_C + 20X_D + 20X_E \geq 120$

$5X_A + 10X_B + 5X_C + 3X_D + 2X_E \geq 30$

OBS: DEVIDO A COMPLEXIDADE DESSE EXERCÍCIO OPTOU-SE POR RESOLVÊ-LO NO SOFTWARE ESTATÍSTICO R.

EXERCÍCIO 8:

$$\min Z = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3 \quad \text{S. A} \quad 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 4$$

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 3$$

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0$$

(8.A) PROBLEMA PRIMAL:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA DUAL:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1-º

8

$\max Z = 4Y_1 + 3Y_2$ S. A $2Y_1 + 3Y_2 \leq 4$

$2Y_1 + Y_2 \leq 3$

$3Y_1 + 3Y_2 \leq 6$

8.3) PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

RESOLVENDO GRAFICAMENTE (POIS SÃO DUAS VARIÁVEIS - R^2)

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$2Y_1 + 3Y_2 = 4$ SE $Y_1 = 0 \therefore Y_2 = 1,3$

$3Y_2 = 4 - 2Y_1$ SE $Y_2 = 0 \therefore Y_1 = 1,9$

$Y_2 = 1,3 - 0,7Y_1$

INCLINAÇÃO: $-0,7$

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$2Y_1 + Y_2 = 3$ SE $Y_1 = 0 \therefore Y_2 = 3$

$Y_2 = 3 - 2Y_1$ SE $Y_2 = 0 \therefore Y_1 = 1,5$

INCLINAÇÃO: -2

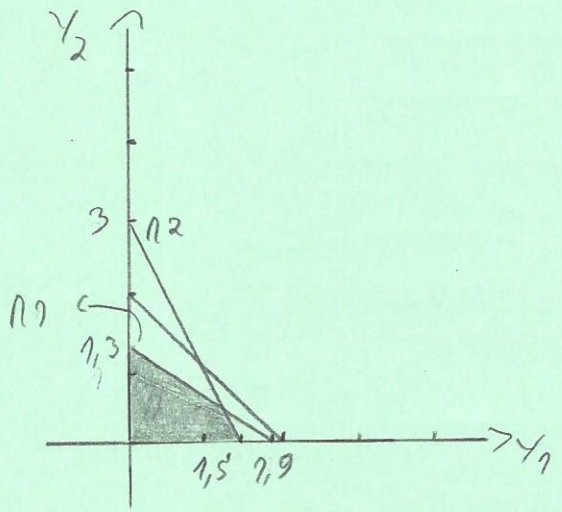
RESTRIÇÃO 3 (R3):

$3Y_1 + 3Y_2 = 6$ SE $Y_1 = 0 \therefore Y_2 = 2$

$3Y_2 = 6 - 3Y_1$ SE $Y_2 = 0 \therefore Y_2 = 2$

$Y_2 = 2 - Y_1$

INCLINAÇÃO: -1



FUNÇÃO OBJETIVO:

(P.A)

$3Y_2 = 2 - 4Y_1$ INCLINAÇÃO: $-1,3$

$Y_2 = 0,32 - 1,3Y_1$

CALCULANDO O PONTO ÓTIMO:

COMO O PONTO ÓTIMO LOCALIZA-SE NA INTERSECÇÃO DAS CURVAS DE RESTRIÇÃO R1 E R2 UTILIZAMÁ ESSAS RESTRIÇÕES PARA SE OBTER OS VALORES DE Y_1 E Y_2

$$\begin{cases} 2Y_1 + 3Y_2 = 4 \\ 2Y_1 + Y_2 = 3 \quad \times(-1) \end{cases} \sim \begin{cases} 2Y_1 + 3Y_2 = 4 \\ -2Y_1 - Y_2 = -3 \end{cases}$$

$$2Y_2 = 1$$

$$Y_2 = \frac{1}{2} \therefore Y_1 = \frac{5}{4}$$

SENDO ASSIM,

$$(Y_1^*, Y_2^*) = (1,25; 0,5)$$

MAXIMIZANDO Z,

$$\max Z = 4Y_1 + 3Y_2$$

$$= 4(1,25) + 3(0,5)$$

$$\boxed{Y = 6,5}$$



↝ DUAL

$Y_i > 0 \therefore S_i = 0$

$X_i = 0 \therefore \bar{c}_i > 0$

↳ PRIMAL

} UMA VEZ QUE Y_1 E $Y_2 > 0$ IMPLICA QUE AS RESTRIÇÕES DO PRIMAL SÃO ATENDIDAS NA IGUALDADE, OU SEJA, SEM FOLGA.

(P.C) TEOREMA DA DUALIDADE

PROBLEMA DUAL:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$2Y_1 + 3Y_2 + \bar{c}_1 = 4$

$2(1,25) + 3(0,5) + \bar{c}_1 = 4$

$$\begin{cases} 4 + \bar{c}_1 = 4 \\ \bar{c}_1 = 0 \therefore X_1 > 0 \end{cases}$$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2023/1º

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$2y_1 + y_2 + \bar{c}_2 = 3$

$2(1,25) + 0,5 + \bar{c}_2 = 3$

$3 + \bar{c}_2 = 3$ → $\bar{c}_2 = 0 \therefore x_2 > 0$

RESTRIÇÃO 3 (R3):

$3y_1 + 3y_2 + \bar{c}_3 = 6$

$3(1,25) + 3(0,5) + \bar{c}_3 = 6$

$5,25 + \bar{c}_3 = 6$ → $\bar{c}_3 = 0,75 \therefore x_3 = 0$

PORTANTO, O PROBLEMA PRIMAL SERÁ:

$x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ E $x_3 = 0$

UMA VEZ QUE AS RESTRIÇÕES DO PROBLEMA PRIMAL SÃO DADAS POR:

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$

TEM-SE QUE:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \quad \times(-2) \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ -6x_1 - 2x_2 = -6 \end{cases}$$

$-4x_1 = -2$

$x_1 = \frac{1}{2} \therefore x_2 = \frac{3}{2}$

$SBP(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1, s_2) = (0,5; 1,5; 0; \underbrace{0; 0}_{\text{POIS } y_1 \text{ E } y_2 > 0})$, SENDO ASSIM, AS RESTRIÇÕES DO PRIMAL SÃO ATENDIDAS NA IGUALDADE

CONFERINDO SE O RESULTADO DO PROBLEMA PRIMAL É IGUAL AO DO PROBLEMA DUAL.

(19.A)

PROBLEMA PRIMAL:

$\min Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

$= 4(0,5) + 3(1,5) + 6(0)$

$= 6,5$

PROBLEMA DUAL:

$\max Z = 4y_1 + 3y_2$

$= 4(1,25) + 3(0,5)$

$= 6,5$

EXERCÍCIO 10:

(10.A) $f(x,y) = x^2 + y^2$ S.A $2x + y \leq 2$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max \mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda_1(2 - 2x - y) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore 2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (1)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore 2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad (2)$

$\lambda_1(2 - 2x - y) = 0 \quad (3)$

$\lambda_2 x = 0 \quad (4)$

$\lambda_3 y = 0 \quad (5)$

$\lambda_1 \geq 0 \quad (6)$

$\lambda_2 \geq 0 \quad (7)$

$\lambda_3 \geq 0 \quad (8)$

$2x + y \leq 2 \quad (9)$

$x \geq 0 \quad (10)$

$y \geq 0 \quad (11)$

LISTA VII MATEMÁTICA I
2013/1º

(10)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$

1.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

POR(3): $2X+Y=2$

$0=2 \Rightarrow$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

POR(3): $2X+Y=2$ POR(5): $\lambda_3=0$ POR(2): $2(2)-\lambda_1+0=0$

$Y=2$ $\lambda_1=4$

POR(1): $2(0)-2(4)+\lambda_2=0$

$\lambda_2=8$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)=(0,2,4,8,0)$ É UM CANDIDATO (*)

1.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

POR(3): $2X+Y=2$ POR(4): $\lambda_2=0$ POR(1): $2(1)-2\lambda_1+0=0$

$X=1$ $\lambda_1=1$

POR(2): $2(0)-1+\lambda_3=0$

$\lambda_3=1$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)=(1,0,1,0,1)$ É UM CANDIDATO (*)

1.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

POR(3): $2X+Y=2$ POR(4): $\lambda_2=0$ POR(5): $\lambda_3=0$

$Y=2-2X$

POR(1): $2X-2\lambda_1+0=0$ POR(2): $2Y-\lambda_1+0=0$

$\lambda_1=X$ $\lambda_1=2Y$

$X=2Y \therefore Y=2-2(2Y) \therefore Y=0{,}4 \therefore X=0{,}8 \therefore \lambda_1=0{,}8$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0,8; 0,4; 0,8; 0; 0)$ É UM CANDIDATO (*)

TO

10.A

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (1): $2(0) - 2(0) + \lambda_2 = 0$ POR (2): $2(0) - 0 + \lambda_3 = 0$

$\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 0$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0,0,0,0,0)$ É UM CANDIDATO (*)

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (5): $\lambda_3 = 0$ POR (2): $2Y - 0 + 0 = 0$

$Y = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $Y \neq 0$

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (4): $\lambda_2 = 0$ POR (1): $2X - 2(0) + 0 = 0$

$X = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $X \neq 0$

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (4): $\lambda_2 = 0$ POR (1): $2X - 2(0) + 0 = 0$

$X = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $X \neq 0$

PORTANTO, EXISTEM QUATRO PONTOS CANDIDATOS:

1º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 2, 4, 8, 0)$

2º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (1, 0, 1, 0, 1)$

3º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0,8; 0,4; 0,8; 0; 0)$

4º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 0, 0, 0, 0)$

SUBSTITUINDO NA FUNÇÃO OBJETIVO PARA ENCONTRAR O PONTO ÓTIMO:

$f(0,2) = (0)^2 + (2)^2 = 4$

$f(1,0) = (1)^2 + (0)^2 = 1$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2073/1º

$f(0,8;\ 0,4) = (0,8)^2 + (0,4)^2 = 0,8$

$f(0,0) = (0)^2 + (0)^2 = 0$

PORTANTO, O PONTO ÓTIMO É $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 2, 4, 8, 0)$

10.B) $f(x,y) = 2y^2 - x$ S. A $x^2 + y^2 \leq 1$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max \alpha = 2y^2 - x + \lambda_1(1 - x^2 - y^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \therefore -1 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \quad (1)$

$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \therefore 4y - 2\lambda_1 y + \lambda_3 = 0 \quad (2)$

$\lambda_1(1 - x^2 - y^2) = 0 \quad (3)$

$\lambda_2 x = 0 \quad (4)$

$\lambda_3 y = 0 \quad (5)$

$\lambda_1 \geq 0 \quad (6)$

$\lambda_2 \geq 0 \quad (7)$

$\lambda_3 \geq 0 \quad (8)$

$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (9)$

$x \geq 0 \quad (10)$

$y \geq 0 \quad (11)$

(17.A)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$

1.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

PON(3): $x^2+y^2=1$

$0=1$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

PON(3): $x^2+y^2=1$

$Y=\pm 1$ DESCARTA O NEGATIVO

$Y=1$

PON(1): $-1-2\lambda_1(0)+\lambda_2=0$

$\lambda_2=1$

PON(5): $\lambda_3=0$

PON(2): $4(1)-2\lambda_1(1)+0=0$

$\lambda_1=2$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)=(0,1,2,1,0)$ É UM CANDIDATO. (*)

1.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

PON(3): $x^2+y^2=1$

$x=\pm 1$ DESCARTA O NEGATIVO

$x=1$

PON(4): $\lambda_2=0$

PON(1): $-1-2\lambda_1(1)+0=0$

$\lambda_1=-\frac{1}{2}$ VIOLA (6)

1.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

PON(3): $x^2+y^2=1$

$y^2=1-x^2$

PON(4): $\lambda_2=0$

PON(5): $\lambda_3=0$

PON(1): $-1-2\lambda_1 x+0=0$

$\lambda_1=-\frac{1}{2x}$

PON(2): $4y-2\lambda_1 y+0=0$

$\lambda_1=2$

LOGO, $x=-0{,}25$ VIOLA (10)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$

2.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

POR (1): $-1 - 2(0).(0) + \lambda_2 = 0$ POR (2): $4(0) - 2(0).(0) + \lambda_3 = 0$

$\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 0$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 0, 0, 1, 0)$ É UM CANDIDATO (*)

2.2) SUPONHA $X=0$ E $Y \neq 0$

POR (3): $\lambda_3 = 0$ POR (2): $4Y - 2(0)Y + 0 = 0$

$Y=0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $Y \neq 0$

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y=0$

POR (4): $\lambda_2 = 0$ POR (1): $-1 - 2(0)X + 0 = 0$

$-1 = 0$ GERA UM ABSURDO

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (4): $\lambda_2 = 0$ POR (1): $-1 - 2(0)X + 0 = 0$

$-1 = 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTEM DOIS PONTOS CANDIDATOS:

1º) $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 1, 2, 1, 0)$

2º) $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 0, 0, 1, 0)$

SUBSTITUINDO NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$f(0,1) = 2(1)^2 - 0 = 2$

$f(0,0) = 2(0)^2 - 0 = 0$

PORTANTO, O PONTO CRÍTICO QUE RETORNA O MAIOR VALOR CONDICIONADO É POR ISSO É CONSIDERADO COMO PONTO ÓTIMO É DADO POR: $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 1, 2, 1, 0)$

(10.C) $f(x,y) = 70x - x^2 + 180y - y^2$ S.A $x+y \leq 80$, $x \geq 0$ (12.A)

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max \mathcal{L} = 70x - x^2 + 180y - y^2 + \lambda_1(80 - x - y) + \lambda_2 x$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore 70 - 2x - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore 180 - 2y - \lambda_1 = 0$ (2)

$\lambda_1(80 - x - y) = 0$ (3)

$\lambda_2 x = 0$ (4)

$\lambda_1 \geq 0$ (5)

$\lambda_2 \geq 0$ (6)

$x + y \leq 80$ (7)

$x \geq 0$ (8)

$y \geq 0$ (9)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (3): $x + y = 80$

$0 = 80$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (3): $x + y = 80$

$y = 80$

POR (2): $180 - 2(80) - \lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = 20$

POR (1): $70 - 2(0) - 20 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = 70$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (0, 80, 20, 70)$ É UM CANDIDATO (*)

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (3): $x + y = 80$

$x = 80$

POR (4): $\lambda_2 = 0$

POR (1): $70 - 2(80) - \lambda_1 + 0 = 0$

$\lambda_1 = -70$

VIOLA (5)

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(3): $X + Y = 80$

$Y = 80 - X$

PON(4): $\lambda_2 = 0$

PON(1): $70 - 2X - \lambda_1 + 0 = 0$

$\lambda_1 = 70 - 2X$

PON(2): $\lambda_1 = 180 - 2Y$

LOGO, $70 - 2X = 180 - 2Y$

$2Y - 2X = 170$

$2(80 - X) - 2X = 170$

$160 - 2X - 2X = 170$

$X = -2,5$

VIOLA (8)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(2): $180 - 2(0) - 0 = 0$

$180 = 0$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

PON(1): $70 - 2(0) - 0 + \lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = -70$ VIOLA (6)

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(2): $180 - 2(0) - 0 = 0$

$180 = 0$ GERA UM ABSURDO

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(2): $180 - 2Y - 0 = 0$

$Y = 90$ VIOLA (7)

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO E POR ISSO MESMO ESSE SERÁ O PONTO ÓTIMO.

$(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (0, 80, 20, 10)$

(10.9) $u(x,y) = \ln x + y$ S. A $x + 4y \leq 2$

(13.A)

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max \mathcal{L} = \ln x + y + \lambda_1(2 - x - 4y)$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore \frac{1}{x} - \lambda_1 = 0 \quad (1)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore 1 - 4\lambda_1 = 0 \quad (2)$

$\lambda_1(2 - x - 4y) = 0 \quad (3)$

$\lambda_1 \geq 0 \quad (4)$

$x + 4y \leq 2 \quad (5)$

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (3): $x + 4y = 2$

$0 = 2$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (1) GERA UMA INCONSISTÊNCIA (DIVISÃO POR ZERO)

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (3): $x + 4y = 2$ POR (1): $\lambda_1 = 0,5$ VIOLA (2)

$x = 2$

1.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (2): $\lambda_1 = 0,25$ POR (1): $x = 4$ POR (3): $x + 4y = 2$

$y = -0,5$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*) = (4; -0,5; 0,25)$ É UM CANDIDATO (*)

LISTA VII MATEMÁTICA I
2013/1º

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$

2.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

2.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

2.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

2.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

} POR (2) VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_1 = 0$

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CANDIDATO E POR ISSO MESMO SERÁ O PONTO ÓTIMO.

$$(x^*, y^*, \lambda_1^*) = (4; -0,5; 0,25)$$

EXERCÍCIO 11:

(11.A) $\max Z = 2x + y$ S.A $x + y \leq 5$

$y \leq 1$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$x + y = 5$ SE $x=0 \therefore y=5$

$y = 5 - x$ SE $y=0 \therefore x=5$

INCLINAÇÃO: -1

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$y = 1$

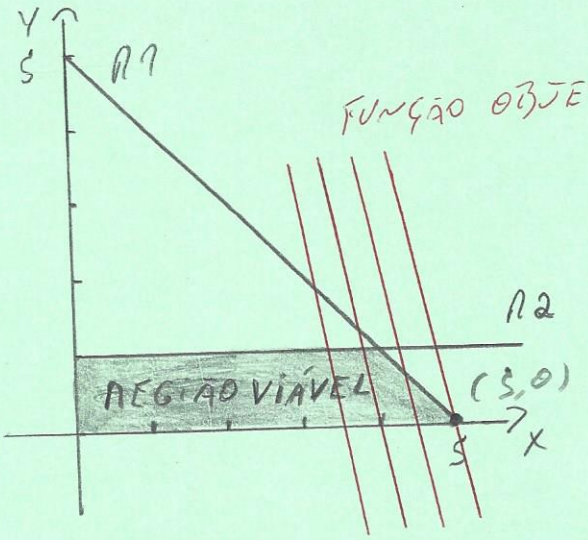
FUNÇÃO OBJETIVO:

$Z = 2x + y$

$y = Z - 2x$

INCLINAÇÃO: -2

PORTANTO, A INCLINAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO É SUPERIOR À DA RESTRIÇÃO 1 - R1.



PORTANTO, O PONTO ÓTIMO, OU SEJA, O PONTO MAIS DISTANTE DA ORIGEM, É DADO POR $(x^*, y^*) = (5, 0)$.

RESOLVENDO PELO MÉTODO SIMPLEX

PRIMEIRAMENTE INTRODUZ AS VARIÁVEIS DE FOLGA PARA QUE AS RESTRIÇÕES POSSAM SER ATENDIDAS NA IGUALDADE.

$$x + y + s_1 = 5$$
$$y + s_2 = 1$$

AGORA INTRODUZ AS VARIÁVEIS IMPLÍCITAS PARA PODER MONTAR O QUADRO SIMPLEX.

$$z - 2x - y + 0s_1 + 0s_2 = 0$$
$$0z + x + y + s_1 + 0s_2 = 5$$
$$0z + 0x + y + 0s_1 + s_2 = 1$$

QUADRO SIMPLEX 1:

	z	x	y	s_1	s_2	b
LINHA 0	1	-2	-1	0	0	0
LINHA 1	0	(1)	1	1	0	5
LINHA 2	0	0	1	0	1	1

COLUNA PIVÔ: x
O ELEMENTO PIVÔ É 1 NA LINHA 1.

QUADRO SIMPLEX 2:

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

	z	x	y	s_1	s_2	b	
LINHA 0	1	0	1	2	0	10	z, MÁXIMO
LINHA 1	0	1	1	1	0	5	
LINHA 2	0	0	1	0	1	1	

PORTANTO, A SBP É DADA POR $(x^*, y^*, s_1^*, s_2^*) = (5, 0, 0, 1)$. SENDO ASSIM, ESSE RESULTADO PELO MÉTODO SIMPLEX RATIFICA O RESULTADO ENCONTRADO NA RESOLUÇÃO GRÁFICA.

ENCONTRANDO O VALOR MÁXIMO DA FUNÇÃO OBJETIVO:

$$z(5,0) = 2(5) + 0$$

$$= 10$$

(11.3) $\min z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ S. A $x + y \leq 1$

$8x + y \leq 8$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

PRIMEIRAMENTE DEVE-SE MULTIPLICAR AS RESTRIÇÕES POR MENOS UM PARA QUE SE AJUSTEM AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO. LOGO,

$$-x - y \geq -1$$

$$-8x - y \geq -8$$

TRANSFORMANDO O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO EM UM PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO.

$\max z = -(x-1)^2 - (y-2)^2$ S. A $x + y \leq 1$

$8x + y \leq 8$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$X+Y=1$ SE $X=0 \therefore Y=1$

$Y=1-X$ SE $Y=0 \therefore X=1$

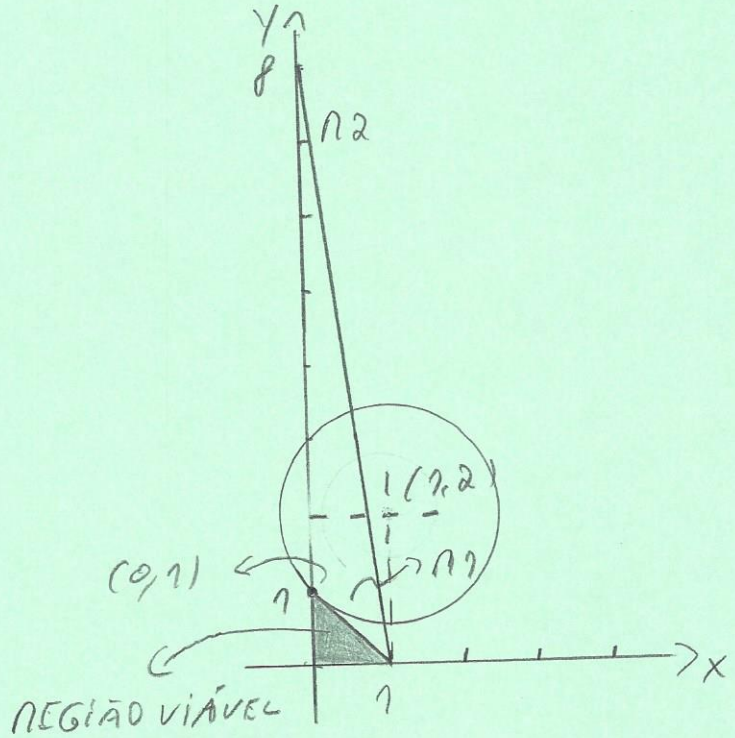
INCLINAÇÃO: -1

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$8X+Y=8$ SE $X=0 \therefore Y=8$

$Y=8-8X$ SE $Y=0 \therefore X=1$

INCLINAÇÃO: -8



FUNÇÃO OBJETIVO:

$\bar{Z} = (X-1)^2 + (Y-2)^2$

$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial X} = 0$

$2(X-1)=0$

$X=1$

$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial Y} = 0$

$2(Y-2)=0$

$Y=2$

CALCULANDO A INCLINAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO:

$d\bar{Z} = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial X} \cdot dX + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial Y} \cdot dY$

$0 = 2(X-1)dX + 2(Y-2)dY$

$2(Y-2)dY = -2(X-1)dX$

$\frac{dY}{dX} = -\frac{X+1}{Y-2}$

IGUALANDO A INCLINAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO COM À DA RESTRIÇÃO 1:

$-\frac{X+1}{Y-2} = -1$

$-X+1 = -Y+2$

$Y-X=1$

$\begin{cases} X+Y=1 \\ Y-X=1 \end{cases}$

$Y=1 \therefore X=0$

PORTANTO, O PONTO ÓTIMO É DADO POR:

$(X^*, Y^*) = (0,1)$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

RESOLVENDO PELO MÉTODO DE KUHN-TUCKER

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO:

$$\max Z = -(x-1)^2 - (y-2)^2 + \lambda_1(1-x-y) + \lambda_2(8-8x-y)$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \leq 0 \therefore -2x + 2 - \lambda_1 - 8\lambda_2 \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \leq 0 \therefore -2y + 4 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \geq 0 \therefore 1 - x - y \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \geq 0 \therefore 8 - 8x - y \geq 0 \quad (4)$$

$$x \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore x(-2x + 2 - \lambda_1 - 8\lambda_2) = 0 \quad (5)$$

$$y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore y(-2y + 4 - \lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad (6)$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \lambda_1(1 - x - y) = 0 \quad (7)$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \lambda_2(8 - 8x - y) = 0 \quad (8)$$

$$x \geq 0 \quad (9)$$

$$y \geq 0 \quad (10)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (11)$$

$$\lambda_2 \geq 0 \quad (12)$$

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$ E $\lambda_2 > 0$

1.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (3): $X + Y = 1$

$0 = 1$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (3): $X + Y = 1$

$Y = 1$

POR (P1): $8X + Y = 8$

$1 = 8$ GERA UM ABSURDO

1.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (3): $X + Y = 1$

$X = 1$

POR (1): $-2(1) + 2 - \lambda_1 - 8\lambda_2 \leq 0$

$\lambda_1 \geq -8\lambda_2$ VIOLA (11) POIS POR (12) $\lambda_2 \geq 0$

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (3): $X + Y = 1$

$Y = 1 - X$

POR (5): $-2X + 2 - \lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = -2X + 2 - 8\lambda_2$

POR (6): $-2Y + 4 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = -2Y + 4 - \lambda_2$

LOGO, $-2X + 2 - 8\lambda_2 = -2Y + 4 - \lambda_2$

$-7\lambda_2 = 2X - 2Y + 2$

$-7\lambda_2 = 2X - 2(1 - X) + 2$

$-7\lambda_2 = 2X - 2 + 2X + 2$

$\lambda_2 = -\frac{4X}{7}$ VIOLA (12) POIS POR (9) $X \geq 0$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

(17)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$ E $\lambda_2 = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (3): $X + Y = 1$

$0 = 1$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (3): $X + Y = 1$ POR (6): $-2(1) + 4 - \lambda_1 - 0 = 0$

$Y = 1$ $\lambda_1 = 2$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (0, 1, 2, 0)$ É UM CANDIDATO (*)

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (3): $X + Y = 1$ POR (5): $-2(1) + 2 - \lambda_1 - 0(0) = 0$

$X = 1$ $\lambda_1 = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_1 > 0$

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (3): $X + Y = 1$ POR (5): $-2X + 2 - \lambda_1 - 0(0) = 0$

$Y = 1 - X$ $\lambda_1 = 2 - 2X$

POR (6): $-2Y + 4 - \lambda_1 - 0 = 0$

$\lambda_1 = 4 - 2Y$

LOGO, $4 - 2Y = 2 - 2X$

$2(X - Y) = -2$

$X - Y = -1$

$X - (1 - X) = -1$

$X - 1 + X = -1$

$2X = 0$

$X = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $X \neq 0$

3ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$ E $\lambda_2 > 0$

3.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (8): $8x+y=8$

$0=8$ GERA UM ABSURDO

3.2) SUPONHA $x=0$ E $y\neq 0$

POR (8): $8x+y=8$ POR (6): $-2(8)+4-\lambda_1-0=0$

$y=8$ $\lambda_1=-12$ VIOLA (11)

3.3) SUPONHA $x\neq 0$ E $y=0$

POR (8): $8x+y=8$ POR (5): $-2(1)+2-0-8\lambda_2=0$

$x=1$ $\lambda_2=0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_2>0$

3.4) SUPONHA $x\neq 0$ E $y\neq 0$

POR (5): $-2x+2-0-8\lambda_2=0$ POR (6): $-2y+4-0-\lambda_2=0$

$\lambda_2=-\frac{2x+2}{8}$ $\lambda_2=-2y+4$

POR (8): $8x+y=8$

$y=8-8x$

$-\frac{2x+2}{8}=-2y+4$

$-2x+2=-16y+32$

$8y-x=15$

$8(8-8x)-x=15$

$x=0,8 \therefore y=1,6 \therefore \lambda_2=0,8$

POR (3): $1-0,8-1,6\geq 0 \therefore -1,4\geq 0$ GERA UM ABSURDO

4ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1=0$ E $\lambda_2=0$

4.1) SUPONHA $x=0$ E $y=0$

POR (1): $-2(0)+2-0-8(0)\leq 0$

$2\leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.2) SUPONHA $x=0$ E $y\neq 0$

POR (1): $-2(0)+2-0-8(0)\leq 0$

$2\leq 0$ GERA UM ABSURDO

LISTA VII MATEMÁTICA I
2013/1º

4.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (2): $-2(0) + 4 - 0 - 0 \leq 0$

$4 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (5): $-2X + 2 - 0 - 8(0) = 0$ POR (6): $-2Y + 4 - 0 - 0 = 0$

$X = 1$ $Y = 2$

POR (3): $1 - 1 - 2 \geq 0$

$-2 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO ÓTIMO DADO POR:

$(X^*, Y^*, \lambda_0^*, \lambda_2^*) = (0, 1, 2, 0)$

(17.C) $\max Z = 3X + 5Y$ S.A $XY \leq 3$

$X^2 + Y^2 \leq 10$

$X \geq 0$ $Y \geq 0$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

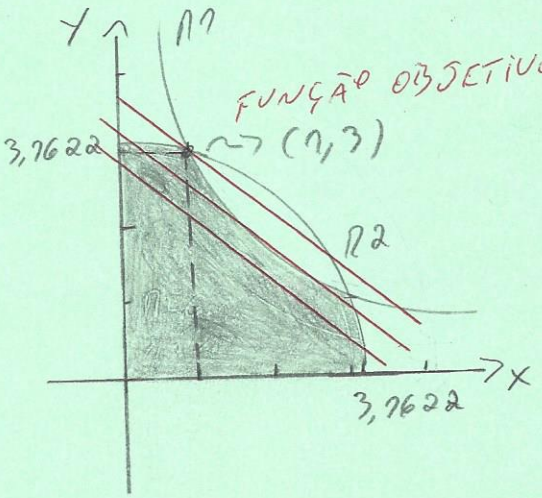
RESTRIÇÃO 1 (R1):

$XY = 3 \therefore Y = \frac{3}{X}$

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$x^2 + y^2 = 10$ SE $x = 0 \therefore y = 3,1622$ } DESCARTA O NEGATIVO

$y = \sqrt{10 - x^2}$ SE $y = 0 \therefore x = 3,1622$ }



FUNÇÃO OBJETIVO:

$Z = 3x + 5y$

$y = \frac{1}{5} z - \frac{3}{5} x$

INCLINAÇÃO: $-0,6$

O PONTO ÓTIMO OCORRE QUANDO A R1 = R2. ENTÃO,

$\frac{3}{x} = (10 - x^2)^{1/2}$

$\frac{9}{x^2} = 10 - x^2 \therefore x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$w = x^2 \therefore w^2 - 10w + 9 = 0$

$w = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2}$

$w = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{cases} 9 \therefore x = 3 \\ 1 \therefore x = 1 \end{cases}$

SE $x = 3 \therefore y = \frac{3}{x} \therefore y = 1$

SE $x = 1 \therefore y = \frac{3}{x} \therefore y = 3$

PORTANTO, O PONTO ÓTIMO É DADO POR:

$(x^*, y^*) = (1, 3)$

RESOLVENDO PELO MÉTODO DE KUHN-TUCKER

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max Z = 3x + 5y + \lambda_1 (3 - xy) + \lambda_2 (10 - x^2 - y^2)$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

LISTA VII MATEMÁTICA I
2013/1º

$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \leq 0 \therefore 3 - \lambda_1 Y - 2\lambda_2 X \leq 0$ (1)

$\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \leq 0 \therefore 5 - \lambda_1 X - 2\lambda_2 Y \leq 0$ (2)

$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} \geq 0 \therefore 3 - XY \geq 0$ (3)

$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} \geq 0 \therefore 10 - X^2 - Y^2 \geq 0$ (4)

$X \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \therefore X(3 - \lambda_1 Y - 2\lambda_2 X) = 0$ (5)

$Y \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = 0 \therefore Y(5 - \lambda_1 X - 2\lambda_2 Y) = 0$ (6)

$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \lambda_1(3 - XY) = 0$ (7)

$\lambda_2 \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \lambda_2(10 - X^2 - Y^2) = 0$ (8)

$X \geq 0$ (9)

$Y \geq 0$ (10)

$\lambda_1 \geq 0$ (11)

$\lambda_2 \geq 0$ (12)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$ E $\lambda_2 > 0$

1.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (7): $XY = 3$

$0 = 3$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (7): $XY = 3 \therefore 0 = 3$ GERA UM ABSURDO

1.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(7): $XY = 3$

$0 = 3$ GERA UM ABSURDO

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(7): $XY = 3$

$Y = \frac{3}{X}$

PON(8): $X^2 + Y^2 = 10$

$X^2 + \frac{9}{X^2} = 10$

$X^4 - 10X^2 + 9 = 0$ $\nearrow X = 3 \therefore Y = 1$ $\searrow X = 1 \therefore Y = 3$

PARA $X = 3$ E $Y = 1$

PON(5): $3 - \lambda_1(1) - 2\lambda_2(3) = 0$

$\lambda_1 = 3 - 6\lambda_2$

PON(6): $5 - \lambda_1(3) - 2\lambda_2(1) = 0$

$\lambda_1 = \frac{5 - 2\lambda_2}{3}$

$3 - 6\lambda_2 = \frac{5 - 2\lambda_2}{3}$

$\lambda_2 = 0{,}25 \therefore \lambda_1 = 1{,}5$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (3; 1; 1{,}5; 0{,}25)$ É UM CANDIDATO. (*)

PARA $X = 1$ E $Y = 3$

PON(5): $3 - \lambda_1(3) - 2\lambda_2(1) = 0$

$\lambda_1 = \frac{3 - 2\lambda_2}{3}$

PON(6): $5 - \lambda_1(1) - 2\lambda_2(3) = 0$

$\lambda_1 = 5 - 6\lambda_2$

$\frac{3 - 2\lambda_2}{3} = 5 - 6\lambda_2$

$\lambda_2 = 0{,}75 \therefore \lambda_1 = 0{,}5$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (1; 3; 0{,}5; 0{,}75)$ É UM CANDIDATO. (*)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$ E $\lambda_2 = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(7): $XY = 3$

$0 = 3$ GERA UM ABSURDO

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1.º

2.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

POR (7): $XY=3$

$0=3$ GERA UM ABSURDO

2.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

POR (7): $XY=3$

$0=3$ GERA UM ABSURDO

2.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

POR (5): $3-\lambda_1 Y-2(0)X=0$ POR (6): $5-\lambda_1 X-2(0)Y=0$

$\lambda_1=\frac{3}{Y}$ $\lambda_1=\frac{5}{X}$

LOGO, $\frac{3}{Y}=\frac{5}{X} \therefore Y=\frac{3}{5}X$

POR (7): $XY=3$

$X=2,236 \therefore Y=1,342 \therefore \lambda_1=2,236$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)=(2,236; 1,342; 2,236; 0)$ É UM CANDIDATO. (*)

3ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1=0$ E $\lambda_2>0$

3.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

POR (8): $X^2+Y^2=10$

$0=10$ GERA UM ABSURDO

3.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

POR (8): $X^2+Y^2=10$

$Y=3,162$ DESCARTA O NEGATIVO

POR (6): $5-(0).(0)-2\lambda_2(3,162)=0$

$\lambda_2=0,8$

PON(7): $3 - (0).(3,762) - 2(0,8).(0) \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

3.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(8): $X^2 + Y^2 = 10$ PON(5): $3 - (0).(0) - 2\lambda_2(3,762) = 0$

$X = 3,762$ $\lambda_2 = 0,5$

PON(2): $5 - (0).(3,762) - 2(0,5).(0) \leq 0$

$5 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

3.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(5): $3 - (0)Y - 2\lambda_2 X = 0$

$$\lambda_2 = \frac{1,5}{X}$$

PON(6): $5 - (0)X - 2\lambda_2 Y = 0$

$$\lambda_2 = \frac{2,5}{Y}$$

LOGO, $\frac{1,5}{X} = \frac{2,5}{Y}$

$Y = 1,7X$

PON(8): $X^2 + Y^2 = 10$

$X^2 + 2,8X^2 = 10$

$X = 1,9 \therefore Y = 3,23 \therefore \lambda_2 = 0,8$

PON(3): $3 - (1,9).(3,23) \geq 0$

$-3,1 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

4ª TENTATIVA SUPONHA $\lambda_1 = 0$ E $\lambda_2 = 0$

4.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(1): $3 - (0).(0) - 2(0).(0) \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

4.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

PON(1): $3-(0)Y-2(0).(0)\leq 0$

$3\leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

PON(1): $3-(0).(0)-2(0)X\leq 0$

$3\leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

PON(1): $3-(0)Y-2(0)X\leq 0$

$3\leq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTEM TRÊS PONTOS CRÍTICOS CANDIDATOS:

1º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (3; 1; 1,5; 0,25)$

2º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (1; 3; 0,5; 0,75)$

3º) $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (2,236; 1,342; 2,236; 0)$

SUBSTITUINDO NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$f(3,1) = 3(3) + 5(1) = 14$

$f(1,3) = 3(1) + 5(3) = 18$

$f(2,236; 1,342) = 3(2,236) + 5(1,342) = 13,416$

PORTANTO, O PONTO ÓTIMO É DADO POR:

$(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (1; 3; 0,5; 0,75)$

11.1) $\min Z = (X-3)^2 + (Y-4)^2$ S.A $X+2Y\leq 8$

$4X+Y\leq 10$

$X\geq 0$ $Y\geq 0$

PRIMEIRAMENTE DEVE-SE MULTIPLICAR AS RESTRIÇÕES POR MENOS UM PARA QUE POSSAM AJUSTAR AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO. ENTÃO,

$$-x-2y \geq -8$$
$$-4x-y \geq -10$$

TRANSFORMANDO O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO EM UM PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO.

$$\max z = -(x-3)^2-(y-4)^2 \quad \text{S.A} \quad x+2y \leq 8$$
$$4x+y \leq 10$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$x+2y=8$ SE $x=0 \therefore y=4$

$y = 4 - \frac{1}{2}x$ SE $x=0 \therefore x=8$

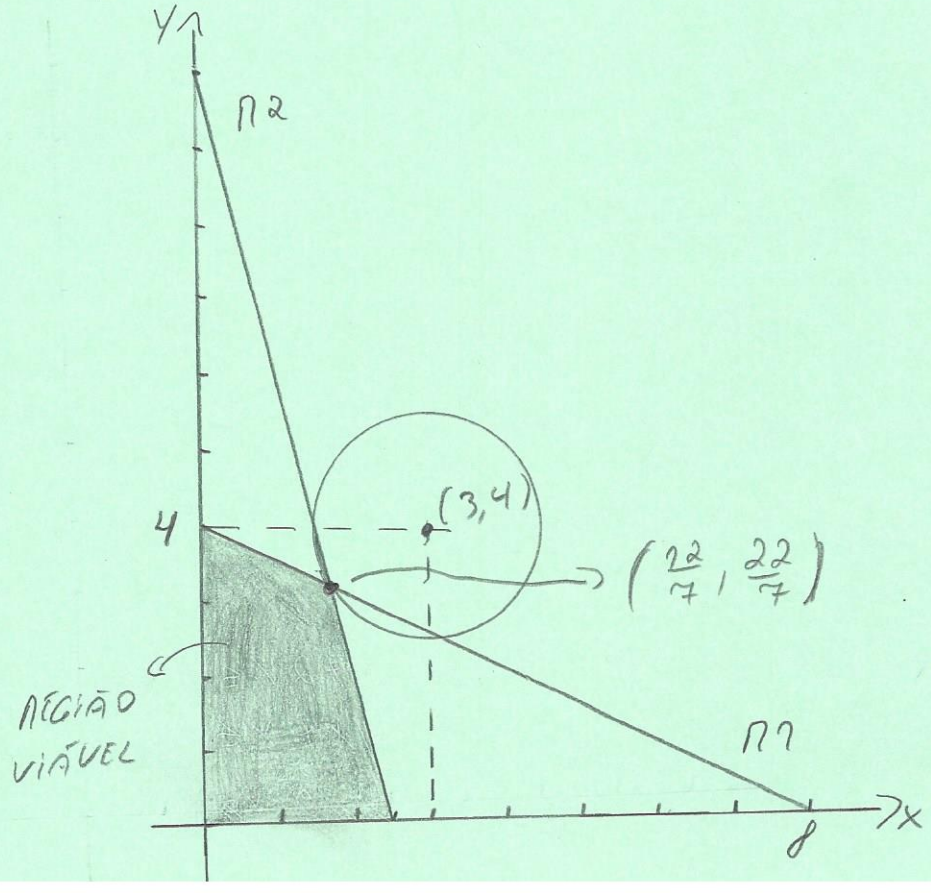
INCLINAÇÃO: $-0,5$

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$4x+y=10$ SE $x=0 \therefore y=10$

$y = 10-4x$ SE $y=0 \therefore x=2,5$

INCLINAÇÃO: -4



LISTA VII MATEMÁTICA I

2017/1.º

FUNÇÃO OBJETIVO

$\bar{z} = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = 0$

$2(x-3) = 0 \qquad 2(y-4) = 0$

$x = 3 \qquad y = 4$

LOGO, O PONTO ÓTIMO É DADO PELA INTERSECÇÃO DE R1 E R2:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 4x + y = 10 \quad \times(-2) \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ -8x - 2y = -20 \end{cases}$$

$$-7x = -12$$

$$x = \frac{12}{7} \therefore y = \frac{22}{7}$$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{22}{7}\right)$$

RESOLVENDO PELO MÉTODO DE KUHN-TUCKER

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max d = -(x-3)^2 - (y-4)^2 + \lambda_1(8 - x - 2y) + \lambda_2(10 - 4x - y)$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial d}{\partial x} \leq 0 \therefore -2x + 6 - \lambda_1 - 4\lambda_2 \leq 0 \quad (1)$

$\frac{\partial d}{\partial y} \leq 0 \therefore -2y + 8 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \quad (2)$

$\frac{\partial d}{\partial \lambda_1} \geq 0 \therefore 8 - x - 2y \geq 0 \quad (3)$

$\frac{\partial d}{\partial \lambda_2} \geq 0 \therefore 10 - 4x - y \geq 0 \quad (4)$

$x \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore x(-2x+6-\lambda_1-4\lambda_2)=0$ (5)

$y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore y(-2y+8-2\lambda_1-\lambda_2)=0$ (6)

$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \lambda_1(8-x-2y)=0$ (7)

$\lambda_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \lambda_2(10-4x-y)=0$ (8)

$x \geq 0$ (9)

$y \geq 0$ (10)

$\lambda_1 \geq 0$ (11)

$\lambda_2 \geq 0$ (12)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$ E $\lambda_2 > 0$

1.1) SUPONHA $x=0$ E $y=0$

POR (7): $x+2y=8$

$0=8$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x=0$ E $y \neq 0$

POR (7): $x+2y=8$

$y=4$

POR (6): $-2(4)+8-2\lambda_1-\lambda_2=0$

$\lambda_2 = -2\lambda_1$ VIOLA (12)

POIS POR (11)

$\lambda_1 \geq 0$

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y=0$

POR (7): $x+2y=8$

$x=8$

POR (5): $-2(8)+6-\lambda_1-4\lambda_2=0$

$\lambda_1 = -10-4\lambda_2$ VIOLA (11)

POIS POR (12)

$\lambda_2 \geq 0$

1.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2017/1-0

POR (7): $x + 2y = 8$ POR (8): $4x + y = 10$

$x = 8 - 2y$ $4(8-2y) + y = 10$

$32 - 8y + y = 10$

$y = \frac{22}{7} \therefore x = \frac{12}{7}$

POR (5): $-2(12/7) + 6 - \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = 18/7 - 4\lambda_2$

POR (6): $-2(22/7) + 8 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = \frac{12/7 - \lambda_2}{2}$

LOGO, $\frac{18}{7} - 4\lambda_2 = \frac{12/7 - \lambda_2}{2}$

$\lambda_2 = \frac{24}{49} \therefore \lambda_1 = \frac{30}{49}$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{22}{7}, \frac{30}{49}, \frac{24}{49}\right)$ É UM CANDIDATO. (*)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$ E $\lambda_2 = 0$

2.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (7): $x + 2y = 8$

$0 = 8$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (7): $x + 2y = 8$ POR (6): $-2(4) + 8 - 2\lambda_1 - 0 = 0$

$y = 4$ $\lambda_1 = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_1 > 0$

2.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (7): $x + 2y = 8$ POR (5): $-2(8) + 6 - \lambda_1 - 4(0) = 0$ (2.3.1)

$x = 8$ $\lambda_1 = -10$ VIOLA (11)

2.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (5): $-2x + 6 - \lambda_1 - 4(0) = 0$

$\lambda_1 = -2x + 6$

POR (6): $-2y + 8 - 2\lambda_1 - 0 = 0$

$\lambda_1 = -y + 4$

LOGO, $-2x + 6 = -y + 4$ POR (7): $x + 2y = 8$

$y - 2x = -2$ $x = 8 - 2y$

$y - 2(8 - 2y) = -2$

$y = \frac{14}{5} \therefore x = \frac{12}{5} \therefore \lambda_1 = \frac{6}{5}$

POR (4): $10 - 4\left(\frac{12}{5}\right) - \frac{24}{5} \geq 0$

$-2{,}4 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

3ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$ E $\lambda_2 > 0$

3.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (8): $4x + y = 10$

$0 = 10$ GERA UM ABSURDO

3.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (8): $4x + y = 10$ POR (6): $-2(10) + 8 - 2(0) - \lambda_2 = 0$

$y = 10$ $\lambda_2 = -12$ VIOLA (12)

3.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (8): $4x + y = 10$ POR (5): $-2(2{,}5) + 6 - 0 - 4\lambda_2 = 0$

$x = 2{,}5$ $\lambda_2 = 0{,}25$

POR (2): $-2(0) + 8 - 2(0) - 0{,}25 \leq 0 \therefore 7{,}75 \leq 0$ ABSURDO

LISTA VII MATEMÁTICA I

2073/1.º

3.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(5): $-2X + 6 - 0 - 4\lambda_2 = 0$

$$\lambda_2 = -\frac{X+3}{2}$$

PON(6): $-2Y + 8 - 2(0) - \lambda_2 = 0$

$$\lambda_2 = -2Y + 8$$

LOGO, $-\frac{X+3}{2} = -2Y + 8$ PON(8): $4X + Y = 10$

$Y = 10 - 4X$

$4Y - X = 13$

$4(10 - 4X) - X = 13$

$$X = \frac{27}{17} \therefore Y = \frac{62}{17} \therefore \lambda_2 = \frac{12}{17}$$

PON(3): $8 - \frac{27}{17} - 2\left(\frac{62}{17}\right) \geq 0$

$-0,9 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

4ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$ E $\lambda_2 = 0$

4.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(1): $-2(0) + 6 - 0 - 4(0) \leq 0$

$6 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

PON(1): $-2(0) + 6 - 0 - 4(0) \leq 0$

$6 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(2): $-2(0) + 8 - 2(0) - 0 \leq 0$

$8 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (5): $-2x + 6 - 0 - 4(0) = 0$

$x = 3$

POR (6): $-2y + 8 - 2(0) - 0 = 0$

$y = 4$

POR (3): $8 - 3 - 2(4) \geq 0$

$-3 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM, ESSE É O PONTO ÓTIMO.

$$(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{22}{7}, \frac{30}{49}, \frac{24}{49}\right)$$

11.E) $\max Z = 3x - 2y$ S.A $xy \leq 4$

$x^2 + y^2 \leq 16$

$x \leq y$

$x \geq 0$ $y \geq 0$

RESOLVENDO GRAFICAMENTE

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$xy = 4$

$y = \frac{4}{x}$

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$x^2 + y^2 = 16$

$y = (16 - x^2)^{1/2}$

SE $x = 0 \therefore y = 4$

SE $y = 0 \therefore x = 4$

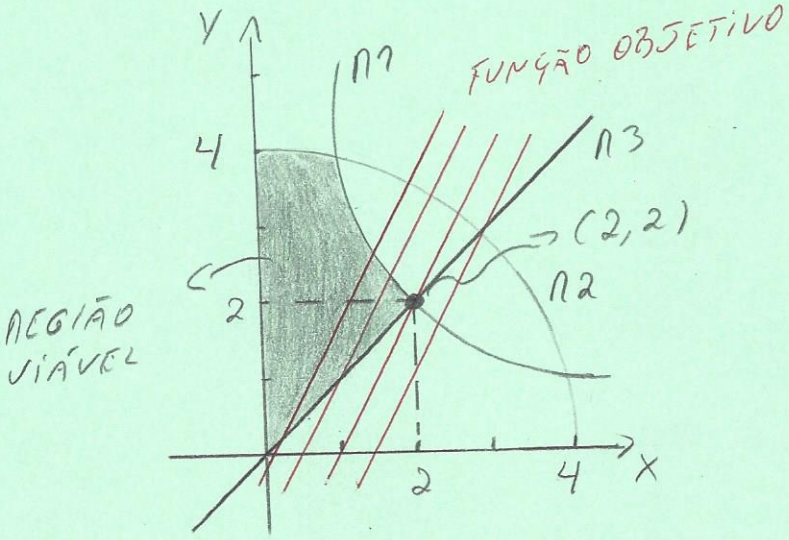
} DESCARTA O NEGATIVO

RESTRIÇÃO 3 (R3):

$x - y = 0 \therefore x = y$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º



FUNÇÃO OBJETIVO

$\bar{z} = 3x - 2y$ INCLINAÇÃO: +1,5

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\bar{z}$

O PONTO ÓTIMO SE DARÁ NA INTERSECÇÃO DAS CURVAS DE RESTRIÇÃO Π1 E Π3 E, DESSA FORMA, DEVE-SE MONTAR UM SISTEMA COM AS DUAS EQUAÇÕES DESSAS RESTRIÇÕES PARA OBTER O PONTO ÓTIMO. ENTÃO,

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases}$$

$x(x) = 4$

$x^2 = 4$

$x = 2 \therefore y = 2$ (DESCARTA OS NEGATIVOS)

PORTANTO, O PONTO ÓTIMO É DADO POR:

$(x^*, y^*) = (2, 2)$

RESOLVENDO PELO MÉTODO DE KUHN-TUCKER

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max d = 3x - 2y + \lambda_1(4 - xy) + \lambda_2(16 - x^2 - y^2) + \lambda_3(y - x)$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO

25.A

$$\frac{\partial L}{\partial x} \leq 0 \therefore 3 - \lambda_1 Y - 2\lambda_2 X - \lambda_3 \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} \leq 0 \therefore -2 - \lambda_1 X - 2\lambda_2 Y + \lambda_3 \leq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \geq 0 \therefore 4 - XY \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \geq 0 \therefore 16 - X^2 - Y^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} \geq 0 \therefore Y - X \geq 0 \quad (5)$$

$$X \cdot \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \therefore X(3 - \lambda_1 Y - 2\lambda_2 X - \lambda_3) = 0 \quad (6)$$

$$Y \cdot \frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \therefore Y(-2 - \lambda_1 X - 2\lambda_2 Y + \lambda_3) = 0 \quad (7)$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \lambda_1(4 - XY) = 0 \quad (8)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \lambda_2(16 - X^2 - Y^2) = 0 \quad (9)$$

$$\lambda_3 \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0 \therefore \lambda_3(Y - X) = 0 \quad (10)$$

$$X \geq 0 \quad (11)$$

$$Y \geq 0 \quad (12)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad (13)$$

$$\lambda_2 \geq 0 \quad (14)$$

$$\lambda_3 \geq 0 \quad (15)$$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1.º

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ E $\lambda_3 > 0$

1.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

1.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (10): $X = Y$ POR (8): $XY = 4$

$x^2 = 4$

$x = 2 \therefore Y = 2$ DESCARTA OS NEGATIVOS

POR (9): $x^2 + y^2 = 16$

$8 = 16$ GERA UM ABSURDO

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ E $\lambda_3 = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(7): $-2 - \lambda_1 X - 2\lambda_2 - 0 = 0$

$\lambda_1 X + 2\lambda_2 = -2$ VIOLA PON (12), (13) E (14)

3ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ E $\lambda_3 > 0$

3.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

3.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

PON(8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

3.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

3.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(10): $X = Y$ PON(8): $XY = 4$

$X^2 = 4$

$X = 2 \therefore Y = 2$ DESCARTA O NEGATIVO

PON(6): $3 - \lambda_1(2) - 2(0)X + \lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \lambda_3}{2}$$

PON(7): $-2 - \lambda_1(2) - 2(0)Y - \lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{-2 - \lambda_3}{2}$$

LOGO, $\frac{3+\lambda_3}{2} = -\frac{2-\lambda_3}{2}$

$\lambda_3 = \frac{5}{2} \quad \therefore \lambda_1 = \frac{22}{4}$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (2, 2, \frac{22}{4}, 0, 5/2)$ É UM CANDIDATO. (*)

4ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ E $\lambda_3 > 0$

4.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (9): $x^2 + y^2 = 16$

$0 = 16$ ISTO É UM ABSURDO

4.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (10): $x = y$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $x = 0$ E $y \neq 0$

4.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (10): $x = y$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $x \neq 0$ E $y = 0$

4.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (10): $x = y$ POR (9): $x^2 + y^2 = 16$

$x = 2,828 \therefore y = 2,828$

POR (6): $3 - (0)\cdot(2,828) - \lambda_2 (2,828) + \lambda_3 = 0$

$\lambda_3 = 2,828\,\lambda_2 - 3$

POR (7): $-2 - (0)\cdot(2,828) - 2\lambda_2 (2,828) - \lambda_3 = 0$

$\lambda_3 = -2 - 5,657\,\lambda_2$

LOGO, $2,828\,\lambda_2 - 3 = -2 - 5,657\,\lambda_2$

$\lambda_2 = 0,354 \therefore \lambda_3 = -2$ VIOLA (15)

5ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ E $\lambda_3 = 0$

5.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

5.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

5.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (8): $XY = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

5.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (6): $3 - \lambda_1 Y - 2(0)X + 0 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{Y}{3}$$

POR (7): $-2 - \lambda_1 X - 2(0)Y - 0 = 0$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{X}$$

LOGO, $\frac{Y}{3} = -\frac{2}{X}$

$XY = -6$ VIOLA (8)

6ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ E $\lambda_3 = 0$

6.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (9): $X^2 + Y^2 = 76$

$0 = 76$ GERA UM ABSURDO

6.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (9): $X^2 + Y2 = 76$

$Y = 4$ DESCARTA O NEGATIVO

PON(7): $-2-(0)x-2\lambda_2(4)-0=0$

$\lambda_2=-\frac{1}{4}$ VIOLA (14)

6.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

PON(9): $x^2+Y^2=16$

$X=4$ DESCARTA O NEGATIVO

PON(6): $3-(0).(0)-2\lambda_2(4)-0=0$

$\lambda_2=\frac{3}{8}$

PON(5): $0-4\geq 0 \therefore -4\geq 0$ GERA UM ABSURDO

6.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

PON(6): $3-(0)Y-2\lambda_2 X+0=0$

$\lambda_2=\frac{3}{2X}$

PON(7): $-2-(0)x-2\lambda_2 Y-0=0$

$\lambda_2=-\frac{1}{Y}$ VIOLA PON(12) E (14)

7ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ E $\lambda_3>0$

7.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

PON(1): $3-(0).(0)-2(0).(0)+\lambda_3\leq 0$

$\lambda_3\leq -3$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_3>0$

7.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

PON(7): $-2-(0)(0)-2(0)Y-\lambda_3=0$

$\lambda_3=-2$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_3>0$

7.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(6): $3 - (0).(0) - 2(0)X + \lambda_3 = 0$

$\lambda_3 = -3$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_3 > 0$

7.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(6): $3 - (0)Y - 2(0)X + \lambda_3 = 0$

$\lambda_3 = -3$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_3 > 0$

8ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ E $\lambda_3 = 0$

8.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(7): $3 - (0).(0) - 2(0).(0) + 0 \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

8.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

PON(7): $3 - (0)Y - 2(0).(0) + 0 \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

8.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(7): $3 - (0).(0) - 2(0)X + 0 \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

8.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(7): $3 - (0)Y - 2(0)X + 0 \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM, ESSE SERÁ O PONTO ÓTIMO. ENTÃO,

$(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (2, 2, \frac{22}{4}, 0, \frac{5}{2})$

SUBSTITUINDO NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$f(2,2) = 3(2) - 2(2) = 2$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

EXERCÍCIO 12:

$\min (x-4)^2 + (y-2)^2$ S.A $x+y \leq 4$

$x+4y \leq 12$

$3x+y \leq 15$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

PRIMEIRAMENTE DEVE-SE MULTIPLICAR AS RESTRIÇÕES POR MENOS UM PARA QUE SE AJUSTEM AO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO. ENTÃO,

$-x-y \geq -4$

$-x-4y \geq -12$

$-3x-y \geq -15$

TRANSFORMANDO O PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO EM UM PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO.

$\max -(x-4)^2-(y-2)^2$ S.A $x+y \leq 4$

$x+4y \leq 12$

$3x+y \leq 15$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

12.A) RESOLVENDO GRAFICAMENTE

RESTRIÇÕES NA IGUALDADE:

RESTRIÇÃO 1 (R1):

$x+y=4$ SE $x=0 \therefore y=4$ INCLINAÇÃO: -1

$y=4-x$ SE $y=0 \therefore x=4$

RESTRIÇÃO 2 (R2):

$X + 4Y = 12$ SE $X = 0 \therefore Y = 3$

$Y = 3 - \frac{1}{4}X$ SE $Y = 0 \therefore X = 12$

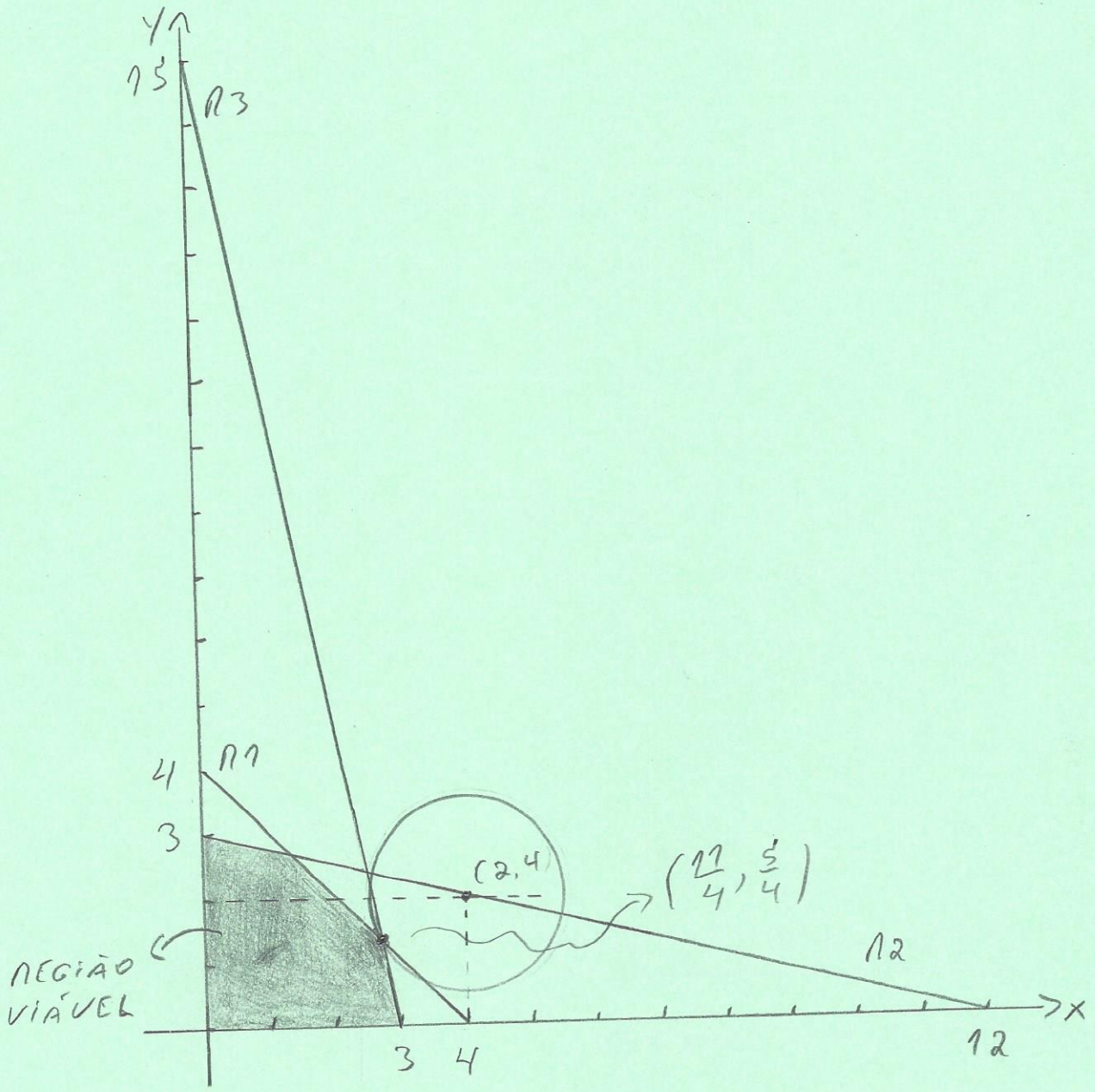
INCLINAÇÃO: $-0{,}25$

RESTRIÇÃO 3 (R3):

$5X + Y = 15$ SE $X = 0 \therefore Y = 15$

$Y = 15 - 5X$ SE $Y = 0 \therefore X = 3$

INCLINAÇÃO: -5



LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\bar{z} = (x-4)^2 + (y-2)^2$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = 0$$

$$2(x-4) = 0 \qquad 2(y-2) = 0$$

$$x = 4 \qquad y = 2$$

COMO O PONTO ÓTIMO SE LOCALIZA NA INTERSECÇÃO DAS CURVAS DAS RESTRIÇÕES R1 E R3 MONTA-SE UM SISTEMA ENTRE AS FUNÇÕES DESSAS RESTRIÇÕES PARA ACHAR OS VALORES DE X E Y.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 5x+y=15 \quad \times(-1) \end{cases} \sim \begin{cases} x+x=4 \\ -5x-y=-15 \end{cases}$$

$$-4x = -11$$

$$x = \frac{11}{4} \therefore y = \frac{5}{4}$$

LOGO, O PONTO ÓTIMO É DADO POR:

$$(x^*, y^*) = \left(\tfrac{11}{4}, \tfrac{5}{4}\right)$$

(12.B) RESOLVENDO PELO MÉTODO DE KUHN-TUCKER

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$$\max d = -(x-4)^2 - (y-2)^2 + \lambda_1(4-x-y) + \lambda_2(12-x-4y) + \lambda_3(15-5x-y)$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial d}{\partial x} \leq 0 \therefore -2x + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 \leq 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial d}{\partial y} \leq 0 \therefore -2y + 4 - \lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 \leq 0 \qquad (2)$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} \geq 0 \therefore 4 - x - y \geq 0$ (3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} \geq 0 \therefore 12 - x - 4y \geq 0$ (4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} \geq 0 \therefore 15 - 3x - y \geq 0$ (5)

$x \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore x(-2x + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3) = 0$ (6)

$y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore y(-2y + 4 - \lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3) = 0$ (7)

$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \lambda_1(4 - x - y) = 0$ (8)

$\lambda_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \lambda_2(12 - x - 4y) = 0$ (9)

$\lambda_3 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0 \therefore \lambda_3(15 - 3x - y) = 0$ (10)

$x \geq 0$ (11)

$x \geq 0$ (12)

$\lambda_1 \geq 0$ (13)

$\lambda_2 \geq 0$ (14)

$\lambda_3 \geq 0$ (15)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ E $\lambda_3 > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

PON(8): $x + y = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

PON(8): $x + y = 4 \therefore y = 4$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

POR (9): $X + 4Y = 12$

$16 = 12$ GERA UM ABSURDO

1.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (8): $X + Y = 4$ POR (9): $X + 4Y = 12$

$X = 4$ $4 = 12$ GERA UM ABSURDO

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (8): $X + Y = 4$ POR (9): $X + 4Y = 12$

$X = 4 - Y$ $4 - Y + 4Y = 12$

$Y = \frac{8}{3} \therefore X = \frac{4}{3}$

POR (10): $5X + Y = 15$

$9,3 = 15$ GERA UM ABSURDO

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ E $\lambda_3 = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (8): $X + Y = 4$

$0 = 4$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (8): $X + Y = 4$ POR (9): $X + 4Y = 12$

$Y = 4$ $Y = 3$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (8): $X + Y = 4$ POR (9): $X + 4Y = 12$

$X = 4$ $X = 12$ GERA UMA CONTRADIÇÃ

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (8): $X + Y = 4$ POR (9): $X + 4Y = 12$

$X = 4 - Y$ $4 - Y + 4Y = 12$

$Y = 8/3 \therefore X = 4/3$

PON(6): $-2\left(\frac{4}{3}\right)+8-\lambda_1-\lambda_2-5(0)=0$

$\lambda_1=\frac{16}{3}-\lambda_2$

PON(7): $-2\left(\frac{8}{3}\right)+4-\lambda_1-4\lambda_2-0=0$

$\lambda_1=-\frac{4}{3}-4\lambda_2$

LOGO, $\frac{16}{3}-\lambda_2=-\frac{4}{3}-4\lambda_2$

$\lambda_2=-\frac{20}{9}$ VIOLA (14)

3ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1>0$, $\lambda_2=0$ E $\lambda_3>0$

3.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

PON(8): $X+Y=4$

$0=4$ GERA UM ABSURDO

3.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

PON(8): $X+Y=4$

$Y=4$

PON(10): $5X+Y=15$

$Y=15$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

3.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

PON(8): $X+Y=4$

$X=4$

PON(10): $5X+Y=15$

$X=3$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

3.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

PON(8): $X+Y=4$

$Y=4-X$

PON(10): $5X+Y=15$

$5X+4-X=15$

$X=\frac{11}{4}\therefore Y=\frac{5}{4}$

PON(6): $-2\left(\frac{11}{4}\right)+8-\lambda_1-0-5\lambda_3=0$

$\lambda_1=\frac{5}{2}-5\lambda_3$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2017/1º

PON(7): $-2\left(\frac{3}{4}\right)+4-\lambda_1-4(0)-\lambda_3=0$

$\lambda_1=\frac{3}{2}-\lambda_3$

LOGO, $\frac{3}{2}-3\lambda_3=\frac{3}{2}-\lambda_3$

$\lambda_3=\frac{1}{4}\ \therefore\ \lambda_1=\frac{3}{4}$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)=(11/4, 3/4, 3/4, 0, 1/4)$ É UM CANDIDATO. (*)

4ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$ E $\lambda_3>0$

4.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

PON(9): $X+4Y=12$

$0=12$ GERA UM ABSURDO

4.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$.

PON(9): $X+4Y=12$

$Y=3$

PON(10): $3X+Y=13$

$Y=13$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

4.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

PON(9): $X+4Y=12$

$X=12$

PON(10): $3X+Y=13$

$X=3$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

4.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

PON(9): $X+4Y=12$

$X=12-4Y$

PON(10): $3X+Y=13$

$3(12-4Y)+Y=13$

$Y=\frac{23}{11}\ \therefore\ X=\frac{48}{11}$

PON(6): $-2\left(\frac{48}{11}\right)+8-0-\lambda_2-3\lambda_3=0$

$\lambda_2=\frac{36}{11}-3\lambda_3$

POL(7): $-2\left(\frac{45}{19}\right)+4-0-4\lambda_2-\lambda_3=0$

$\lambda_2=-\frac{14}{76}-\frac{\lambda_3}{4}$

LOGO, $\frac{56}{19}-5\lambda_3=-\frac{14}{76}-\frac{\lambda_3}{4}$

$-5\lambda_3+\frac{\lambda_3}{4}=-\frac{14}{76}-\frac{56}{19}$

$-95\lambda_3+\lambda_3=-14-224$

76

$\lambda_3=\frac{119}{47}\therefore\lambda_2=-9,7$ VIOLA (14)

5ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1>0$, $\lambda_2=0$ E $\lambda_3=0$

5.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

POL(8): $X+Y=4$

$0=4$ GERA UM ABSURDO

5.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq0$

POL(8): $X+Y=4$ POL(7): $-2(4)+4-\lambda_1-4(0)-0=0$

$Y=4$ $\lambda_1=-4$ VIOLA (13)

5.3) SUPONHA $X\neq0$ E $Y=0$

POL(8): $X+Y=4$ POL(6): $-2(4)+8-\lambda_1-0-5(0)=0$

$X=4$ $\lambda_1=0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_1>0$

5.4) SUPONHA $X\neq0$ E $Y\neq0$

POL(8): $X+Y=4$ POL(6): $-2X+8-\lambda_1-0-5(0)=0$

$Y=4-X$ $\lambda_1=8-2X$

POL(7): $-2Y+4-\lambda_1-4(0)-0=0$

$\lambda_1=4-2Y$

LOGO, $8-2X=4-2Y$

$8-2X=4-2(4-X)$

$X=3 \therefore Y=1 \therefore \lambda_1=2$

PON(3): $18-5(3)-1\geq 0$

$-1\geq 0$ GERA UM ABSURDO

6ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$ E $\lambda_3=0$

6.1) SUPONHA $X=0$ E $Y=0$

PON(9): $X+4Y=12$

$0=12$ GERA UM ABSURDO

6.2) SUPONHA $X=0$ E $Y\neq 0$

PON(9): $X+4Y=12$ PON(7): $-2(3)+4-0-4\lambda_2-0=0$

$Y=3$ $\lambda_2=\frac{1}{2}$

PON(1): $-2(0)+8-0-\frac{1}{2}-5(0)\leq 0$

$7,5\leq 0$ GERA UM ABSURDO

6.3) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y=0$

PON(9): $X+4Y=12$ PON(6): $-2(12)+8-0-\lambda_2-5(0)=0$

$X=12$ $\lambda_2=-16$ VIOLA (14)

6.4) SUPONHA $X\neq 0$ E $Y\neq 0$

PON(9): $X+4Y=12$ PON(6): $-2X+8-0-\lambda_2-5(0)=0$

$X=12-4Y$ $\lambda_2=8-2X$

PON(7): $-2Y+4-0-4\lambda_2-0=0$

$\lambda_2=\frac{2-Y}{2}$

LOGO, $8 - 2x = \frac{2 - y}{2}$

$y = 2 \therefore x = 4 \therefore \lambda_2 = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda_2 > 0$

7ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ E $\lambda_3 > 0$

7.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(10): $5x + y = 15$

$0 = 15$ GERA UM ABSURDO

7.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

PON(10): $5x + y = 15$ PON(7): $-2(15) + 4 - 0 - 4(0) - \lambda_3 = 0$

$y = 15$ $\lambda_3 = 26$

PON(3): $4 - x - y \geq 0$

$-11 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

7.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(10): $5x + y = 15$ PON(6): $-2(3) + 8 - 0 - 0 - 5\lambda_3 = 0$

$x = 3$ $\lambda_3 = \frac{2}{5}$

PON(2): $-2(0) + 4 - 0 - 4(0) - \frac{2}{5} \leq 0$

$3{,}6 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

7.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(10): $5x + y = 15$ PON(6): $-2x + 8 - 0 - 0 - 5\lambda_3 = 0$

$y = 15 - 5x$ $\lambda_3 = \frac{8 - 2x}{5}$

PON(7): $-2y + 4 - 0 - 4(0) - \lambda_3 = 0$

$\lambda_3 = 4 - 2y$

LOGO, $\frac{8-2x}{3} = 4-2y$

$8-2x = 20-10y$

$8-2x = 20-10(13-5x)$

$x = \frac{69}{26} \therefore y = \frac{43}{26} \therefore \lambda_3 = \frac{7}{13}$

PON(3): $4 - \frac{69}{26} - \frac{43}{26} \geq 0$

$-0,385 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

4ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ E $\lambda_3 = 0$

4.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

PON(1): $-2(0)+8-0-0-5(0) \leq 0$

$8 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

PON(1): $-2(0)+8-0-0-5(0) \leq 0$

$8 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

PON(2): $-2(0)+4-0-4(0)-0 \leq 0$

$4 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

4.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

PON(6): $-2x+8-0-0-5(0) = 0$ PON(7): $-2y+4-0-4(0)-0 = 0$

$x = 4$ $y = 2$

PON(5): $13-5(4)-2 \geq 0$

$-7 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO É, SENDO ASSIM, ESSE É O PONTO ÓTIMO. LOGO, (14.A)

$$(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (\tfrac{11}{4}, \tfrac{5}{4}, 5/4, 0, 7/4)$$

RATIFICANDO O VALOR ENCONTRADO NA RESOLUÇÃO GRÁFICA.

(12.C) SIM, POIS UMA VEZ QUE A FUNÇÃO OBJETIVO É CONVEXA E TODAS AS RESTRIÇÕES SÃO CÔNCAVAS, ENTÃO, SE FOR ENCONTRADO UM PONTO ÓTIMO PARA ESSE PROBLEMA DE MINIZAÇÃO ESSE SERÁ UM MÍNIMO GLOBAL (TEOREMA DA SUFICIÊNCIA).

EXERCÍCIO 13:

$U(X,Y) = 40\sqrt{x} + Y$

$m \Rightarrow$ RENDA

$P_x = 4 \Rightarrow$ PREÇO DO BEM X

$P_Y = 1 \Rightarrow$ PREÇO DO BEM Y

(13.A) PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$$\max U = 40x^{1/2} + Y \quad \text{S. A} \quad 4X + Y \leq m$$
$$X \geq 0 \quad Y \geq 0$$

(13.B) MÉTODO DE KUHN-TUCKER

PARA $m = 300$

$$\max \mathcal{L} = 40x^{1/2} + Y + \lambda(300 - 4X - Y)$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \leq 0 \therefore 20x^{-1/2} - 4\lambda \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} \leq 0 \therefore 1 - \lambda \leq 0 \quad (2)$$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \therefore 300 - 4x - y \geq 0$ (3)

$x \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore x(20x^{-1/2} - 4\lambda) = 0$ (4)

$y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore y(1 - \lambda) = 0$ (5)

$\lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \therefore \lambda(300 - 4x - y) = 0$ (6)

$x \geq 0$ (7)

$y \geq 0$ (8)

$\lambda \geq 0$ (9)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (6): $4x + y = 300$

$0 = 300$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (1): $20(0)^{-1/2} - 4\lambda \leq 0$

$\lambda \leq 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda > 0$

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (6): $4x + y = 300$ POR (4): $20(75)^{-1/2} - 4\lambda = 0$

$x = 75$ $\lambda = 0,5774$

POR (2): $1 - 0,5774 \leq 0$

$0,4226 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (5): $\lambda = 1$ POR (4): $20X^{-1/2} - 4(1) = 0$

$X = 25$

POR (6): $4X + Y = 300$

$Y = 200$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda^*) = (25, 200, 1)$ É UM CANDIDATO. (*)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (2): $\lambda \geq 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (5): $\lambda = 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (4): $20X^{-1/2} - 4\lambda = 0$

$\lambda = \frac{1}{5X^{1/2}}$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (5): $\lambda = 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM, ESSE É O PONTO ÓTIMO QUE MAXIMIZA A FUNÇÃO OBJETIVO.

PARA $m = 50$

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda > 0$

1.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

POR (6): $4X + Y = 300$

$0 = 300$ GERA UM ABSURDO

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

1.2) SUPONHA $x=0$ E $y\neq 0$

POR (1): $20(0)^{-1/2} - 4\lambda \leq 0$

$\lambda \leq 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda > 0$

1.3) SUPONHA $x\neq 0$ E $y=0$

POR (6): $4x + y = 50$ POR (4): $20(12,5)^{-1/2} - 4\lambda = 0$

$x = 12,5$ $\lambda = 1,4142$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda^*) = (12,5; 0; 1,4142)$ É UM CANDIDATO (*)

1.4) SUPONHA $x\neq 0$ E $y\neq 0$

POR (5): $\lambda = 1$ POR (1): $20x^{-1/2} - 4(1) = 0$

$x = 25$

POR (6): $4(25) + y = 50$

$y = -50$ VIOLA (β)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda = 0$

2.1) SUPONHA $x=0$ E $y=0$

POR (2): $\lambda \geq 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.1) SUPONHA $x=0$ E $y\neq 0$

POR (3): $\lambda = 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.2) SUPONHA $x\neq 0$ E $y=0$

POR (2): $\lambda \geq 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.3) SUPONHA $x\neq 0$ E $y\neq 0$

POR (2): $\lambda \geq 1$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM, ESSE É O PONTO ÓTIMO QUE MAXIMIZA A FUNÇÃO OBJETIVO.

(36.A)

PONTOS ÓTIMOS:

PARA $m = 300 \Rightarrow (x^*, y^*, \lambda^*) = (25, 200, 1)$

PARA $m = 50 \Rightarrow (x^*, y^*, \lambda^*) = (12,5;\ 0;\ 1,4142)$

PORTANTO, CONCLUI-SE QUE COM UMA RENDA DE R$ 300,00 JOÃO IRÁ CONSUMIR AMBOS OS BENS, CONTUDO, COM UMA RENDA DE R$ 50,00 JOÃO CONSUMIRÁ APENAS O BEM X.

EXERCÍCIO 14:

$u(x,y) = 2x + y$

$m = 10$

$P_x = 1 \Rightarrow$ PREÇO DO BEM X

$P_y = 2 \Rightarrow$ PREÇO DO BEM Y

(14.A) PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max u = 2x + y \quad$ S. A $\quad x + 2y \leq 10$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

(14.B) MÉTODO DE KUHN-TUCKER

$\max \alpha = 2x + y + \lambda(10 - x - 2y)$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \leq 0 \therefore 2 - \lambda \leq 0 \quad (1)$

$\frac{\partial \alpha}{\partial y} \leq 0 \therefore 1 - 2\lambda \leq 0 \quad (2)$

$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \geq 0 \therefore 10 - x - 2y \geq 0 \quad (3)$

$x \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \therefore x(2 - \lambda) = 0 \quad (4)$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1º

$Y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0 \therefore Y(10 - 2\lambda) = 0$ (5)

$\lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \therefore \lambda(10 - X - 2Y) = 0$ (6)

$X \geq 0$ (7)

$Y \geq 0$ (8)

$\lambda \geq 0$ (9)

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda > 0$

1.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(6): $X + 2Y = 10$

$0 = 10$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

PON(6): $X + 2Y = 10$ PON(6): $\lambda = 0{,}5$ VIOLA (7)

$Y = 5$

1.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

PON(4): $\lambda = 2$ PON(6): $X + 2Y = 10$

$X = 10$

LOGO, $(X^*, Y^*, \lambda^*) = (10, 0, 2)$ É UM CANDIDATO. (*)

1.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

PON(4): $\lambda = 2$ PON(6): $\lambda = \frac{1}{2}$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda = 0$

2.1) SUPONHA $X = 0$ E $Y = 0$

PON(1): $\lambda \geq 2$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.2) SUPONHA $X = 0$ E $Y \neq 0$

POR (3): $\lambda = \frac{1}{2}$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.3) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y = 0$

POR (4): $\lambda = 2$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

2.4) SUPONHA $X \neq 0$ E $Y \neq 0$

POR (4): $\lambda = 2$ POR (3): $\lambda = \frac{1}{2}$ GERA UMA CONTRADIÇÃO

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM, ESSE É O PONTO ÓTIMO. ENTÃO,

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = (10, 0, 2)$$

SIM, AS CONDIÇÕES DE KUHN-TUCKER SÃO SUFICIENTES, POIS A FUNÇÃO OBJETIVO É CÔNCAVA E A RESTRIÇÃO É CONVEXA.

EXERCÍCIO 15:

$f(x,y) = 5x - 2x^2 + 3xy - 2y^2$ S.A $x + y \leq 2$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

15.A $f'_x = 5 - 4x + 3y \qquad f'_y = 3x - 4y$

$f''_{xx} = -4 \qquad f''_{xy} = 3$

$f''_{yx} = f''_{xy}$ (TEOREMA DE YOUNG) $\qquad f''_{yy} = -4$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1-0

$\Delta_1 = |-4|$

$= -4 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= (-4).(-4) - (3).(3)$

$= 16 - 9$

$= 7 > 0$

PORTANTO, COMO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES ALTERNAM DE SINAL DENTRO DO PADRÃO IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA NEGATIVA E, DESSA FORMA, A FUNÇÃO OBJETIVO É ESTRITAMENTE CÔNCAVA.

15.3) PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$\max \mathcal{L}(X, Y, \lambda) = 5X - 2X^2 + 3XY - 2Y^2 + \lambda(2 - X - Y)$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \leq 0 \therefore 5 - 4X + 3Y - \lambda \leq 0 \quad (1)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} \leq 0 \therefore 3X - 4Y - \lambda \leq 0 \quad (2)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \therefore 2 - X - Y \geq 0 \quad (3)$

$X \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \therefore X(5 - 4X + 3Y - \lambda) = 0 \quad (4)$

$Y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0 \therefore Y(3X - 4Y - \lambda) = 0 \quad (5)$

$\lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \therefore \lambda(2 - X - Y) = 0 \quad (6)$

$X \geq 0 \quad (7)$

$Y \geq 0 \quad (8)$

$\lambda \geq 0 \quad (9)$

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

PON(6): $x + y = 2$

$0 = 2$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

PON(6): $x + y = 2$ PON(5): $3(0) - 4(2) - \lambda = 0$

$y = 2$ $\lambda = 8$

PON(1): $5 - 4(0) + 3(2) - 8 \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

PON(6): $x + y = 2$ PON(4): $5 - 4(2) + 3(0) - \lambda = 0$

$x = 2$ $\lambda = 3$

PON(2): $3(2) - 4(0) - 3 \leq 0$

$3 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

1.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

PON(6): $x + y = 2$ PON(4): $5 - 4x + 3y - \lambda = 0$

$x = 2 - y$ $\lambda = 5 - 4x + 3y$

PON(5): $\lambda = 3x - 4y$

LOGO, $5 - 4x + 3y = 3x - 4y$

$7x - 7y = 5$

$7(2 - y) - 7y = 5$

$y = \frac{9}{14} \therefore x = \frac{19}{14} \therefore \lambda = \frac{21}{14}$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\frac{19}{14}, \frac{9}{14}, \frac{21}{14}\right)$ É UM CANDIDATO. (*)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda = 0$

2.1) SUPONHA $x=0$ E $y=0$

PON(1): $5 - 4(0) + 3(0) - 0 \leq 0$

$5 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $x=0$ E $y \neq 0$

PON(3): $3(0) - 4y - 0 = 0$

$y=0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $y \neq 0$

2.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y=0$

PON(4) = $5 - 4x + 3(0) - 0 = 0$

$x = \frac{4}{5}$

PON(1): $5 - 4\left(\frac{4}{5}\right) + 3(0) - 0 \leq 0$

$1{,}8 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

2.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

PON(4): $5 - 4x + 3y - 0 = 0$ PON(3): $3x - 4y - 0 = 0$

$x = \frac{5 + 3y}{4}$ $x = \frac{4}{3}y$

LOGO, $\frac{5+3y}{4} = \frac{4}{3}y$

$y = \frac{15}{7} \therefore x = \frac{60}{27}$

PON(3): $2 - \frac{60}{27} - \frac{15}{7} \geq 0$

$-3 \geq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, HÁ APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM, ESSE É O PONTO ÓTIMO. ENTÃO,

$(X^*, Y^*, \lambda^*) = \left(\frac{19}{14}, \frac{9}{14}, \frac{29}{14}\right)$ (39.A)

SUBSTITUINDO NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$$1\left(\frac{29}{14}, \frac{9}{14}\right) = 5\left(\frac{29}{14}\right) - 2\left(\frac{29}{14}\right)^2 + 3\left(\frac{29}{14}\right)\left(\frac{9}{14}\right) - 2\left(\frac{9}{14}\right)^2$$
$$= 4,9$$

UMA VEZ QUE A FUNÇÃO OBJETIVO É CÔNCAVA IMPLICA PELO TEOREMA DA SUFICIÊNCIA QUE AS RESTRIÇÕES DEVAM SER CONVEXAS, O QUE NO PRESENTE CASO SE CONFIRMA POIS A RESTRIÇÃO É LINEAR E PORTANTO É AO MESMO TEMPO CÔNCAVA E CONVEXA. DESSA FORMA, TEM-SE UM PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO (FUNÇÃO OBJETIVO CÔNCAVA), LOGO, O PONTO ÓTIMO ENCONTRADO É DE MÁXIMO.

EXERCÍCIO 16: *(E, SENDO ASSIM, $\lambda > 0$)

(16.i) SIM, MAS DESDE QUE A RESTRIÇÃO DO PROBLEMA SEJA ATIVA NO PONTO ÓTIMO, ISTO É, SEJA ATENDIDA NA IGUALDADE* E SEJA QUALIFICADA, OU SEJA, O POSTO DA MATRIZ JACOBIANA DAS RESTRIÇÕES SEJA COMPLETO. VERIFICANDO A QUALIFICAÇÃO DAS RESTRIÇÕES:

(16.A) $g(X,Y) = 2X + Y \leq 2$

$g'_X = 2$
$g'_Y = 1$ } RESTRIÇÃO QUALIFICADA

(16.B) $g(X,Y) = (X+1)^2 + (Y+1)^2 \leq 5$

$g'_X = 2X + 2$
$g'_Y = 2Y + 2$ } SERÁ QUALIFICADA PARA $X \neq -1$ E $Y \neq -1$

• NO PONTO ÓTIMO

(16.ii) QUANDO (X^*, Y^*, λ^*) SATISFAZ AS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE KUHN-TUCKER (X^*, Y^*) SÓ SERÁ UM PONTO DE MÁXIMO DO PROBLEMA APENAS QUANDO A FUNÇÃO OBJETIVO FOR CÔNCAVA OU QUASE-CÔNCAVA.

E AS RESTRIÇÕES CONVEXAS (TEOREMA DA SUFICIÊNCIA).

16.xii.a) PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$$\max d(X,Y,\lambda) = X^2Y^2 + \lambda(2-2x-Y)$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial d}{\partial x} \leq 0 \therefore 2xy^2 - 2\lambda \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial d}{\partial y} \leq 0 \therefore 2x^2y - \lambda \leq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial d}{\partial \lambda} \geq 0 \therefore 2 - 2x - y \geq 0 \quad (3)$$

$$x \cdot \frac{\partial d}{\partial x} = 0 \therefore x(2xy^2 - 2\lambda) = 0 \quad (4)$$

$$y \cdot \frac{\partial d}{\partial y} = 0 \therefore y(2x^2y - \lambda) = 0 \quad (5)$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial d}{\partial \lambda} = 0 \therefore \lambda(2 - 2x - y) = 0 \quad (6)$$

$$x \geq 0 \quad (7)$$

$$y \geq 0 \quad (8)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (9)$$

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (6): $2x + y = 2$

$0 = 2$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (6): $2x + y = 2$ POR (5): $2(0)^2(2) - \lambda = 0$

$y = 2$ $\lambda = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda > 0$

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (6): $2x + y = 2$ POR (4): $2(1)(0)^2 - 2\lambda = 0$

$x = 1$ $\lambda = 0$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda > 0$

1.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (6): $2x + y = 2$ POR (4): $2 \times y^2 - 2\lambda = 0$

$y = 2 - 2x$ $\lambda = x y^2$

POR (5): $\lambda = 2x^2 y$

LOGO, $x y^2 = 2x^2 y$

$y = 2x$

$2 - 2x = 2x$

$x = \frac{1}{2} \therefore y = 1 \therefore \lambda = \frac{1}{2}$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ É UM CANDIDATO. (*)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda = 0$ ⇒ NÃO PRECISA SUPOR, POIS A RESTRIÇÃO É ATIVA (ITEM 16.i)

2.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

NÃO VIOLA NADA

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda^*) = (0, 0, 0)$ É UM CANDIDATO. (*)

2.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

$2x^2 y - \lambda = 0$

$y = \frac{\lambda}{2x^2}$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $y \neq 0$

2.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

$2x y^2 - 2\lambda = 0$

$x = \frac{\lambda}{y^2}$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $x \neq 0$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1°

2.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (4): $2xy^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda = 2xy^2$ VIOLA A SUPOSIÇÃO $\lambda = 0$

PORTANTO, EXISTEM DOIS PONTOS CRÍTICOS CANDIDATOS:

1°) $(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

2°) $(x^*, y^*, \lambda^*) = (0, 0, 0)$

DESSA FORMA, SUBSTITUINDO NA FUNÇÃO OBJETIVO:

$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1)^2 = \frac{1}{4}$

$f(0,0) = (0)^2 \cdot (0)^2 = 0$

ENTÃO, O PONTO ÓTIMO É DADO POR:

$(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

VERIFICANDO SE A FUNÇÃO OBJETIVO É CÔNCAVA OU QUASE-CÔNCAVA NO PONTO ÓTIMO.

$f'_x = 2xy^2 \qquad f'_y = 2x^2y$

$f''_{xx} = 2y^2 \qquad f''_{xy} = 4xy$

$f''_{yx} = f''_{xy}$ 2) PELO TEOREMA DE YOUNG $\qquad f''_{yy} = 2x^2$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2) HESSIANA NO PONTO ÓTIMO

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES:

$\Delta_1 = |2| = 2 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1/2 \end{vmatrix} = (2).(1/2) - (2).(2) = -3 < 0$

LOGO, NÃO SE CONCLUI NADA SOBRE A CONCAVIDADE/CONVEXIDADE DA FUNÇÃO OBJETIVO NO PONTO ÓTIMO E, SENDO ASSIM, VERIFICA-SE A QUASE-CONCAVIDADE/QUASE-CONVEXIDADE.

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA ORLADA:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1'_x & 1'_y \\ 1'_x & 1''_{xx} & 1''_{xy} \\ 1'_y & 1''_{xy} & 1''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2xy^2 & 2x^2y \\ 2xy^2 & 2y^2 & 4xy \\ 2x^2y & 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$\bar{H}$ → MATRIZ HESSIANA ORLADA NO PONTO ÓTIMO

$n = 2$ → NÚMERO DE VARIÁVEIS

$m = 1$ → NÚMERO DE RESTRIÇÕES

$n - m = 2 - 1 = 1$. LOGO, CALCULA-SE APENAS UM MENOR PRINCIPAL LÍDER.

CALCULANDO O MENOR PRINCIPAL LÍDER:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$= (0).(-1)^2 \cdot A_{11} + (1).(-1)^3 \cdot A_{12} + (1/2).(-1)^4 \cdot A_{13}$

$= 0 + (-1).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} + (1/2).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix}$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2013/1.º

$$|\bar{H}| = (-1)[(1).(1/2) - (2).(1/2)] + (1/2).[(1).(2) - (2).(1/2)]$$

$$= (-1).(1/2 - 1) + (1/2).(2 - 1)$$

$$= (-1).(-1/2) + (1/2).(1)$$

$$= 1 > 0$$

DE 3ª ORDEM NEGATIVO E TODOS OS DEMAIS NEGATIVOS A FUNÇÃO É QUASE CONVEXA. POR SUA VEZ, DE 3ª ORDEM POSITIVO E OS DEMAIS ALTERNANDO DE SINAL É QUASE CÔNCAVA.

PORTANTO, CONCLUI-SE QUE A FUNÇÃO OBJETIVO É QUASE-CÔNCAVA E, DESSA FORMA, (x^*, y^*) É UM PONTO DE MÁXIMO DO PROBLEMA (RESPOSTA PARA O ITEM 16.xi)

16.xii.b PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO

$$\max(x, y, \lambda) = 3x + y + \lambda[5 - (x+1)^2 - (y+1)^2]$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \leq 0 \therefore 3 - 2\lambda(x+1) \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \leq 0 \therefore 1 - 2\lambda(y+1) \leq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \therefore [5 - (x+1)^2 - (y+1)^2] \geq 0 \quad (3)$$

$$x \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \therefore x[3 - 2\lambda(x+1)] = 0 \quad (4)$$

$$y \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \therefore y[1 - 2\lambda(y+1)] = 0 \quad (5)$$

$$\lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \therefore \lambda[5 - (x+1)^2 - (y+1)^2] = 0 \quad (6)$$

$$x \geq 0 \ (7) \quad y \geq 0 \ (8) \quad \lambda \geq 0 \ (9)$$

1ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda > 0$

1.1) SUPONHA $x = 0$ E $y = 0$

POR (6): $5 - (x+1)^2 - (y+1)^2 = 0$

$3 = 0$ GERA UM ABSURDO

1.2) SUPONHA $x = 0$ E $y \neq 0$

POR (6): $5 - (x+1)^2 - (y+1)^2 = 0$

$y = 1$ DESCARTA O NEGATIVO

POR (5): $1 - 2\lambda(y+1) = 0$

$\lambda = \frac{1}{4}$

POR (1): $3 - 2\left(\frac{1}{4}\right)(0+1) \leq 0$

$2,5 \leq 0$ GERA UM ABSURDO

1.3) SUPONHA $x \neq 0$ E $y = 0$

POR (6): $5 - (x+1)^2 - (y+1)^2 = 0$

$x = 1$ DESCARTA O NEGATIVO

POR (4): $3 - 2\lambda(x+1) = 0$

$\lambda = \frac{3}{4}$

LOGO, $(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(1, 0, \frac{3}{4}\right)$ É UM CANDIDATO. (*)

1.4) SUPONHA $x \neq 0$ E $y \neq 0$

POR (4): $3 - 2\lambda(x+1) = 0$ POR (5): $1 - 2\lambda(y+1) = 0$

$\lambda = \frac{3}{2(x+1)}$ $\lambda = \frac{1}{2(y+1)}$

LOGO, $\frac{3}{2(x+1)} = \frac{1}{2(y+1)} \therefore x = 3y + 2$

LISTA VII MATEMÁTICA I

2017/1.º

POR (6): $(x+1)^2+(y+1)^2=5$

$x^2+2x+y^2+2y=3$

$(3y+2)^2+2(3y+2)+y^2+2y=3$

$9y^2+12y+4+6y+4+y^2+2y=3$

$10y^2+20y+5=0 \quad \times(1/5)$

$2y^2+4y+1=0$ VIOLA POR (8) (POIS DESENVOLVENDO A FÓRMULA DE BHASKARA ENCONTRA-SE APENAS VALORES NEGATIVOS PARA y)

2ª TENTATIVA: SUPONHA $\lambda=0$ ⇒ NÃO PRECISA SUPOR, POIS A RESTRIÇÃO É ATIVA (ITEM 16.i)

2.1) SUPONHA $x=0$ E $y=0$

POR (1): $3-2(0)(0+1)\leq 0$

$3\leq 0$ GERA UM ABSURDO

2.2) SUPONHA $x=0$ E $y\neq 0$

POR (1): $3-2(0)(0+1)\leq 0$

$3\leq 0$ GERA UM ABSURDO

2.3) SUPONHA $x\neq 0$ E $y=0$

POR (2): $1-2(0)(0+1)\leq 0$

$1\leq 0$ GERA UM ABSURDO

2.4) SUPONHA $x\neq 0$ E $y\neq 0$

POR (1): $3-2(0)(x+1)\leq 0$

$3\leq 0$ GERA UM ABSURDO

PORTANTO, EXISTE APENAS UM PONTO CRÍTICO CANDIDATO E, SENDO ASSIM ESSE É O PONTO ÓTIMO. ENTÃO,

$(x^*, y^*, \lambda^*)=\left(1, 0, \frac{3}{4}\right)$

NESSE CASO, A RESTRIÇÃO É QUALIFICADA (ITEM 16.i) (43.A)

VERIFICANDO SE A RESTRIÇÃO É CONVEXA OU QUASE-CONVEXA:

$g(x) = (x+1)^2 + (y+1)^2 - 5$

$g'_x = 2x+2 \qquad g'_y = 2y+2$

$g''_{xx} = 2 \qquad g''_{xy} = 0$

$g''_{yx} = g''_{xy}$ 2, PELO TEOREMA DE YOUNG $\qquad g''_{yy} = 2$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} g''_{xx} & g''_{xy} \\ g''_{yx} & g''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES:

$|H_1| = |2| = 2 > 0 \qquad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= (2).(2) - (0).(0)$

$= 4 > 0$

UMA VEZ QUE TODOS OS MENORES PRINCIPAIS LÍDERES SÃO POSITIVOS IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É DEFINIDA POSITIVA E, DESSA FORMA, A FUNÇÃO RESTRIÇÃO É ESTRITAMENTE CONVEXA.

SENDO ASSIM, PELO TEOREMA DA SUFICIÊNCIA SE A FUNÇÃO OBJETIVA É CÔNCAVA (NO PRESENTE CASO ESSA É CÔNCAVA E CONVEXA AO MESMO TEMPO, POIS É UMA FUNÇÃO LINEAR) E A RESTRIÇÃO É CONVEXA, ENTÃO, (x^*, y^*) É O PONTO DE MÁXIMO DO PROBLEMA. (RESPOSTA PARA O ITEM 16.ii)

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 2 DA PÁGINA 2

LOGO,

$$SBP(x_1^*, x_2^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (60, 30, 0, 20, 0)$$

LUCRO MÁXIMO,

$$\pi = 180x_1 + 300x_2$$
$$= 180(60) + 300(30)$$
$$= 19.800$$

PORTANTO, CONCLUI-SE QUE O LUCRO MÁXIMO DE R$ 19.800,00 FOI COM FOLGA DE 20 UNIDADES NA RESTRIÇÃO 2 E QUE AS RESTRIÇÕES 1 E 3 FORAM SATISFEITAS NA IGUALDADE, ISTO É, FORAM UTILIZADOS OS 60 GABINETES PEQUENO E AS 120 UNIDADES DE DISCO.