

LISTA II MICROECONOMIA I

2013/12

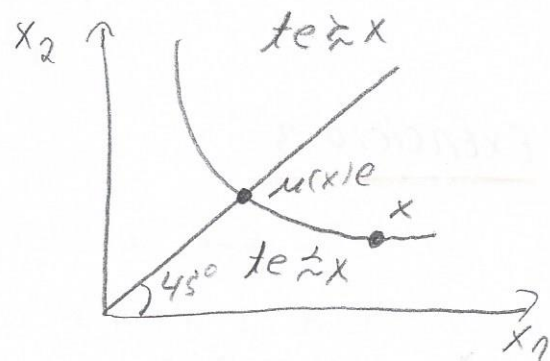
1

EXERCÍCIO 1:

PARA QUE UMA FUNÇÃO DE UTILIDADE $\mu(\cdot)$ POSSA REPRESENTAR UMA RELAÇÃO DE PREFERÊNCIA $\succeq$ É NECESSÁRIO QUE AQUELA SEJA UM VALOR ÚNICO. PORTANTO, SEJA $e = [1, 1, \dots, 1]$ UM VETOR UNITÁRIO $\in \mathbb{R}^n$. PARA UM x QUALQUER, $\mu(x)$ SERÁ UM NÚMERO TAL QUE $x \sim \mu(x)e$. DESSA FORMA, PARA PROVAR QUE $\mu(x)$ É UM VALOR ÚNICO DEFINI-SE DOIS CONJUNTOS:

$$A \equiv \{t \geq 0 / te \succeq x\}$$

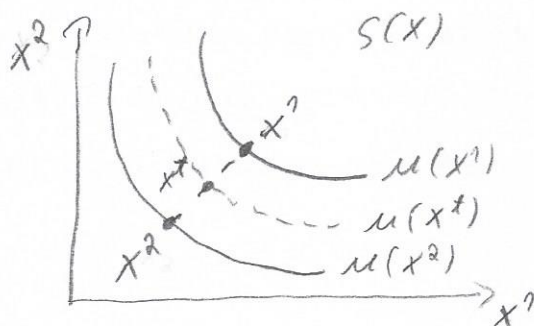
$$B \equiv \{t \geq 0 / te \preceq x\}$$



PARA $t^* \in A \cap B$, TEM-SE QUE $t^*e \sim x$, ENTÃO $\mu(x) = t^*$ SATISFAZENDO $\mu(x)e \sim x$. CONTUDO, $A \cap B$ SÓ EXISTIRÁ SE AMBOS OS CONJUNTOS A E B FOREM FECHADOS, MAS ISSO SÓ É POSSÍVEL SE A RELAÇÃO DE PREFERÊNCIA $\succeq$ FOR CONTÍNUA.

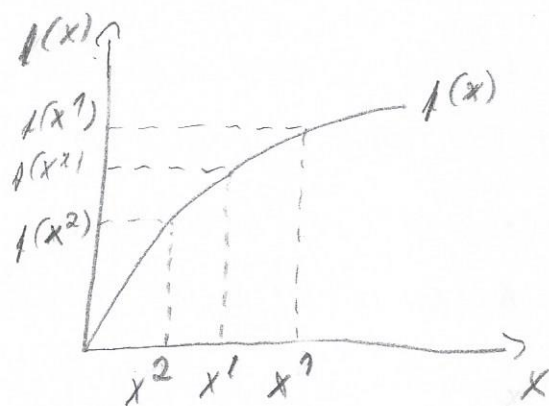
EXERCÍCIO 2:

SUPONHA-SE QUE DUAS CESTAS DE BENS x^1 E x^2 SEJAM DOIS PONTOS NO $\mathbb{R}^2$, DE FORMA QUE $\mu(x^1) > \mu(x^2)$. NESSE CASO, SE $S(x)$ FOR UM CONJUNTO CONVEJO PARA TODO $x \in \mathbb{R}^2$, ENTÃO $S(\mu(x^1))$ SERÁ TAMBÉM UM CONJUNTO CONVEJO. ALÉM DISSO, UMA VEZ QUE $x^2 \in S(\mu(x^1))$, ENTÃO $x^1 \in S(\mu(x^1))$.



SENDO ASSIM, PARA QUALQUER COMBINAÇÃO CONVEXA DE x^1 E x^2 DEVE-SE TER UM $x^3 \in S(u(x^1))$. PORTANTO, DA DEFINIÇÃO DE $S(u(x^1))$ ISSO IMPLICA EM $u(x^1) > u(x^2)$, ENTÃO:

$$u(x^1) > \min \{u(x^1), u(x^2)\}$$



10. mi

EXERCÍCIO 3:

SUPONHA QUE $u(\cdot)$ É ^{ESTRITAMENTE} QUASICÔNCAVA E QUE EXISTAM DUAS CESTAS DE BENS x^1 E x^2 ($x^1 \neq x^2$) $\in X(p, w)$, OU SEJA, x^1 E x^2 MAXIMIZAM A FUNÇÃO.

PARA PROVAR POR CONTRADIÇÃO ADMITA QUE $u(x^1) = u(x^2) = \bar{u}$ E QUE $x^3 = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in X(p, w)$. POIS SE SABE POR DEFINIÇÃO QUE SE X FOR CONVEXA DE TAL FORMA QUE $u(\cdot)$ SEJA QUASICÔNCAVA, ENTÃO $X(p, w)$ É UM CONJUNTO CONVEZO. TAMBÉM POR DEFINIÇÃO SABE-SE QUE $u(x^3) \geq \bar{u}$, POIS $u(x^3) \geq \min \{u(x^1), u(x^2)\}$, ENTÃO, $u(x^3) \geq \min \{u(x^1), u(x^2)\} > \bar{u}$, ISTO É, $u(x^3) > \bar{u}$.

PORTANTO, UMA VEZ QUE FOI POSSÍVEL OBTER UM PONTO x^3 QUE MAXIMIZA A FUNÇÃO UTILIDADE CONCLUI-SE QUE x^1 E x^2 - QUE INICIALMENTE FORAM ADMITIDOS COMO MAXIMIZADORES DA FUNÇÃO UTILIDADE, ISTO É, HAVIAM DOIS PONTOS MAXIMIZADORES - NÃO PERTENCEM A $X(p, w)$, MAS SIM x^3 . SENDO ASSIM, PROVA-SE QUE EXISTE APENAS UMA SOLUÇÃO PARA OS PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO DE UTILIDADE E MINIMIZAÇÃO DE CUSTOS, OU SEJA, APENAS UM PONTO É CAPAZ DE MAXIMIZAR OU MINIMIZAR UMA FUNÇÃO.

EXERCÍCIO 4:

EXERCÍCIO 3:

O CONSUMIDOR NÃO ESTÁ MAXIMIZANDO A UTILIDADE POIS O BEM
MARGINAL DO BEM X, DADO POR $\frac{UM_x}{P_x}$, É MAIOR DO QUE AO OBTI

DO COM O BEM Y. CONSEQUENTEMENTE, EXISTIRÁ UMA CESTA EM QUE A
QUANTIDADE DO BEM X É SUPERIOR A DO BEM Y E, SENDO ASSIM, O CONSU
MIDOR MAXIMIZARÁ A UTILIDADE CONSUMINDO ESSA CESTA.

CALCULANDO A VARIAÇÃO DE CONSUMO DO BEM Y:

$\Delta Y = ?$

$$\begin{aligned} \frac{UM_x}{UM_y} &> \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{UM_x}{P_x} &> \frac{UM_y}{P_y} \\ \frac{UM_x}{P_x} &> \frac{\Delta U / \Delta Y}{P_y} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta U / \Delta Y} &> \frac{P_x}{P_y} \left(\frac{1}{UM_x} \right) \\ \frac{\Delta Y}{\Delta U} &> \frac{P_x}{P_y} \left(\frac{1}{\Delta U / \Delta X} \right) \\ \frac{\Delta Y}{\Delta U} &> \frac{P_x}{P_y} \left(\frac{\Delta X}{\Delta U} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta Y &> \frac{P_x}{P_y} \left(\frac{\Delta X}{\Delta U} \right) (\Delta U) \\ \Delta Y &> \Delta X \left(\frac{P_x}{P_y} \right) \end{aligned}$$

CALCULANDO O ACRESCIMO DE UTILIDADE RESULTANTE DESSA VARIAÇÃO.

EXERCÍCIO 6:

6.1 $U(X, Y)$

Montando o Lagrangiano:

$$d(X, Y, \lambda) = U(X, Y) + \lambda(W - P_X X)$$

$$\frac{\partial d}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial X} - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda P_X = \frac{\partial U}{\partial X} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{P_X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)$$

PELA LEI DE WALRAS SABE-SE QUE:

$$W = P_X X + P_Y Y$$

$$P_X X = W - P_Y Y$$

$$X = \frac{W}{P_X} - \left(\frac{P_Y}{P_X} \right) Y$$

CALCULANDO $\frac{\partial X}{\partial W}$ OBTÉM-SE:

2013/10

3

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial w} &= \left[\frac{w}{p_x} - \left(\frac{p_y}{p_x} \right) y \right]' \\ &= \left[\left(\frac{1}{p_x} \right) w - \left(\frac{p_y}{p_x} \right) y \right]' \\ &= \frac{1}{p_x}\end{aligned}$$

MAS UMA VEZ QUE A UTILIDADE MÁXIMA É DADA POR $U(x^*, y^*) = U(x(p, w))$. ENTÃO,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial w} &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} \\ &= \lambda p_x' \left(\frac{1}{p_x'} \right) \\ &= \lambda\end{aligned}$$

LOGO,

$$\lambda = \frac{\partial U(x^*, y^*)}{\partial w}$$

(5.3) $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$ ($\alpha, \beta > 0$)

Montando o Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = x^\alpha y^\beta + \lambda(w - p_x x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta - \lambda p_x = 0 \Rightarrow \lambda p_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta}{p_x}$$

(7)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \beta X^\alpha Y^{\beta-1} - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda P_Y = \beta X^\alpha Y^{\beta-1} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}}{P_Y} \quad (2) \quad (3.A)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = W - P_X X - P_Y Y = 0 \Rightarrow W = P_X X + P_Y Y \quad (3)$$

IGUALANDO AS EQUAÇÕES (1) E (2) OBTÉM-SE:

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{P_X} = \frac{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}}{P_Y}$$

$$\frac{X^{\alpha-1}}{X^\alpha} = \frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{\beta Y^{\beta-1}}{\alpha Y^\beta} \right)$$

$$X^{-1} = \frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) (Y^{-1})$$

$$\frac{1}{X} = \frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{Y} \right)$$

$$Y = X \left(\frac{P_X}{P_Y} \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (4)$$

SUBSTITUINDO (4) EM (3) OBTÉM-SE:

$$W = P_X X + P_Y \left[X \left(\frac{P_X}{P_Y} \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \right]$$

$$W = P_X X + P_X X \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$W = P_X X \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

$$P_X X = \frac{W}{1 + \frac{\beta}{\alpha}}$$

$$X = \frac{W}{P_X \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)}$$

$$= \frac{W}{\frac{P_X (\alpha + \beta)}{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha W}{P_X (\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\alpha W}{P_X (1)}$$

$$X = \frac{\alpha W}{P_X} \quad (5)$$

SUBSTITUINDO (3) EM (4) OBTÉM-SE:

$$Y = \left[\frac{\alpha W}{P_X(\alpha + \beta)} \right] \left(\frac{P_X}{P_Y} \right) \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \rightarrow Y = \frac{\beta W}{P_Y(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\beta W}{P_Y(1)}$$

$$= \frac{\beta W}{P_Y}$$

LOGO, AS DEMANDAS MARSHALIANAS/WALRASIANAS DE X E Y SÃO DADAS POR:

→ PARCELA DA RENDA QUE VAI PARA O BEM X

$$X = \frac{\alpha W}{P_X(\alpha + \beta)} \quad \text{E} \quad Y = \frac{\beta W}{P_Y(\alpha + \beta)} \rightarrow \text{PARCELA DA RENDA QUE VAI PARA O BEM Y}$$

MAS COMO $\beta = 1 - \alpha$ OBTÉM-SE:

$$X = \frac{\alpha W}{P_X(\alpha + 1 - \alpha)} \quad \text{E} \quad Y = \frac{\beta W}{P_Y(\alpha + 1 - \alpha)}$$

$$= \frac{\alpha W}{P_X(1)} \quad = \frac{\beta W}{P_Y(1)}$$

$$= \frac{\alpha W}{P_X} \quad = \frac{\beta W}{P_Y}$$

EXERCÍCIO 7:

$$U(X, Y) = [\beta X^\rho + (1 - \beta) Y^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

MONTANDO O LAGRANGIANO:

$$\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = [\beta X^\rho + (1 - \beta) Y^\rho]^{\frac{1}{\rho}} + \lambda (W - P_X X)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{1}{\rho} [\beta X^\rho + (1 - \beta) Y^\rho]^{\frac{1}{\rho} - 1} [\beta X^{\rho-1}] - \lambda P_X = 0$$

(4.A)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} [x \beta x^{\rho-1}] - \lambda P_x = 0$$

$$= [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} [\beta x^{\rho-1}] - \lambda P_x = 0$$

Logo,

$$\lambda P_x = \beta x^{\rho-1} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$\lambda = \frac{\beta x^{\rho-1} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}}{P_x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} [(1-\beta)y^{\rho-1}] - \lambda P_y = 0$$

$$= \frac{1}{y} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} [(1-\beta)y^{\rho-1}] - \lambda P_y = 0$$

$$= [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} [(1-\beta)y^{\rho-1}] - \lambda P_y = 0$$

Logo,

$$\lambda P_y = (1-\beta)y^{\rho-1} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$\lambda = \frac{(1-\beta)y^{\rho-1} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}}{P_y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = W - P_x X = 0 \Rightarrow W = P_x X + P_y Y \quad (3)$$

Igualando as equações de (1) e (2) obtém-se:

$$\frac{\beta x^{\rho-1} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}}{P_x} = \frac{(1-\beta)y^{\rho-1} [\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}}{P_y}$$

$$x^{\rho-1} = \left(\frac{P_y}{P_x} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left\{ \frac{[\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}}{[\beta x^\rho + (1-\beta)y^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}} \right\} (y^{\rho-1})$$

LISTA II MICROECONOMIA I
2023/2024

(3)

$$X^{1-\alpha} = \left(\frac{P_X}{P_Y} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) (Y^{1-\alpha})$$

$$X = \left[\left(\frac{P_X}{P_Y} \right) \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) Y^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$= Y \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(4)

SUBSTITUINDO (4) EM (3) OBTÉM-SE:

$$W = P_X \left\{ Y \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} + P_Y Y$$

$$W = P_X Y \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + P_Y Y$$

$$W = Y \left\{ P_X \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + P_Y \right\}$$

$$Y = \frac{W}{P_X \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + P_Y}$$

(5)

SUBSTITUINDO (5) EM (4) OBTÉM-SE:

$$X = \frac{W \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}{P_X \left[\frac{P_X}{P_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + P_Y}$$

DESSA FORMA, AS DEMANDAS WALRASIANAS DE X E Y SÃO DADAS

(P.A.)

POA:

$$X = \frac{w \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}{p_x \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + p_y} \quad \text{E} \quad Y = \frac{w}{p_x \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + p_y}$$

EXERCÍCIO 8: $U(X, Y) = [\beta X^\alpha + (1-\beta)Y^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$

(P.A.) A ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO ENTRE DOIS BENS X_1 E X_2 É DADA POR σ_{12} E MEDE A FACILIDADE DE TROCA ENTRE ESSES BENS.

$$\sigma_{12} = - \frac{\partial [X(P, w) / Y(P, w)]}{\partial [P_X / P_Y]} \cdot \frac{P_X / P_Y}{X(P, w) / Y(P, w)} \quad (9)$$

CALCULANDO A DIVISÃO $\frac{X(P, w)}{Y(P, w)}$:

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \frac{\frac{w \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}{p_x \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + p_y}}{w} \\ &= \frac{\frac{w \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}{p_x \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + p_y}}{\frac{p_x \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + p_y}{w}} \\ &= \frac{\cancel{w} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\cancel{p_x} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + \cancel{p_y}} \cdot \frac{\cancel{p_x} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} + \cancel{p_y}}{\cancel{w}} \\ &= \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

CALCULANDO A $\frac{\partial [x(p,w)/y(p,w)]}{\partial [p_x/p_y]}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [x(p,w)/y(p,w)]}{\partial [p_x/p_y]} &= \left\{ \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\rho-1}} \right\}' \\ &= \frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\rho-1}-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]' \\ &= \frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{2-\rho}{\rho-1}} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

SUBSTITUINDO (2) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\begin{aligned} G_{12} &= - \frac{\frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{2-\rho}{\rho-1}} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left(\frac{p_x}{p_y} \right)}{\left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\rho-1}}} \\ &= - \frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{\frac{2-\rho}{\rho-1}} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left(\frac{p_x}{p_y} \right) \\ &= - \frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{-\frac{\rho-1}{\rho-1}} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left(\frac{p_x}{p_y} \right) \\ &= - \frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right] \\ &= - \frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_x}{p_y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^{-1+1} \end{aligned}$$

$$G_{12} = -\frac{1}{\rho-1} \left[\frac{p_X}{p_Y} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right]^0$$

$$= -\frac{1}{\rho-1} (1)$$

$$= -\frac{1}{\rho-1} \therefore G_{12} = \frac{1}{1-\rho}$$

(P.B) $U(X, Y) = [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]^{\frac{1}{1-\rho}}$

PARA $\rho=1$ OBTÉM-SE:

$$U(X, Y) = [\beta X^1 + (1-\beta)Y^1]^{\frac{1}{1-1}}$$

$$= [\beta X + (1-\beta)Y]$$

ESSA É UMA FUNÇÃO UTILIDADE LINEAR, CUJAS CURVAS DE INDIFERENÇAS TAMBÉM SÃO LINEARES, CHAMADA SUBSTITUTOS PERFEITOS.

(P.C) $\lim_{\rho \rightarrow 0} U(X, Y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{\ln U(X, Y)}$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} e^{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]^{\frac{1}{1-\rho}}}$$

$$= e^{\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]^{\frac{1}{1-\rho}}}$$

$$= e^{\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{1-\rho} \ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}$$

$$= e^{\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{1-\rho}}$$

APLICANDO A REGRAS DE L'HÔPITAL EM $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{1-\rho}$ OBTÉM-SE:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{1-\rho} = \frac{\partial \ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho] / \partial \rho}{\partial (1-\rho) / \partial \rho}$$

LISTA II MICROECONOMIA I

2013/14^o

7

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} &= \frac{1}{1} \frac{[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]'}{[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]} \\&= \frac{1}{[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]} [\beta X^\rho \ln X + (1-\beta)Y^\rho \ln Y] \\&= \frac{1}{[\beta(1) + (1-\beta)(1)]} [\beta X^\rho \ln X + (1-\beta)Y^\rho \ln Y] \\&= \frac{1}{\beta + 1 - \beta} [\beta(1) \ln X + (1-\beta)(1) \ln Y] \\&= 1[\beta \ln X + (1-\beta) \ln Y] \\&= \beta \ln X + (1-\beta) \ln Y \\&= \ln X^\beta + \ln Y^{(1-\beta)} \\&= \ln X^\beta Y^{(1-\beta)}\end{aligned}\tag{2}$$

SUBSTITUINDO (2) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} U(X, Y) &= e^{\ln X^\beta Y^{(1-\beta)}} \\&= X^\beta Y^{(1-\beta)}\end{aligned}$$

(8.7) QUANTO AS CURVAS DE INDEFERÊNCIA TÊM ÂNGULOS LENTOS, COMO NO CASO DOS BENS COMPLEMENTARES PERFEITOS IMPLICA QUE $\lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) = \min\{X, Y\}$. O QUE PODE OCORRER TÃES FORMAS DISTINTAS, A SABER:

$$\rho \rightarrow -\infty \quad X=Y; \quad \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) = X=Y$$

$$2^a) X < Y; \quad \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) = X$$

(7.4)

$$3^a) X > Y. \quad \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) = Y$$

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) &= \lim_{\rho \rightarrow -\infty} e^{\ln U(X, Y)} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow -\infty} e^{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]^{1/\rho}} \\ &= e^{\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]^{1/\rho}} \\ &= e^{\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{1}{\rho} \ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]} \\ &= e^{\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho}} \end{aligned} \quad (1)$$

APLICANDO A REGRAS DE L'HÔPITAL EN $\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho}$ OBTÉMOS:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} &= \frac{\partial \ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho] / \partial \rho}{\partial \rho / \partial \rho} \\ &= \frac{1}{1} \frac{[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]^{-1}}{1} \\ &= \frac{1}{[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]} [\beta X^\rho \ln X + (1-\beta)Y^\rho \ln Y] \\ &= \frac{\beta X^\rho \ln X + (1-\beta)Y^\rho \ln Y}{\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho} \end{aligned} \quad (2)$$

NO CASO EM QUE $X=Y$ A EQUAÇÃO (2) FICARÁ COMO SE SEQUE:

LISTA II MICROECONOMIA I

2013/14

(8)

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} &= \frac{\beta X^\rho \ln X + (1-\beta)X^\rho \ln X}{\beta X^\rho + (1-\beta)X^\rho} \\&= \frac{X^\rho \ln X (\beta + 1 - \beta)}{X^\rho (\beta + 1 - \beta)} \\&= \frac{X^\rho \ln X (1)}{X^\rho (1)} \\&= \frac{X^\rho \ln X}{1 X^\rho} \\&= \ln X\end{aligned}\tag{3}$$

SUBSTITUINDO (3) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow -\infty} V(X, Y) &= e^{\ln X} \\&= X = Y\end{aligned}$$

NO CASO EM QUE $X < Y$ A EQUAÇÃO (2) FICARÁ COMO SE SEGUE:

MULTIPLICANDO A EQUAÇÃO (2) POR $\frac{X^{-\rho}}{X^{-\rho}}$:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln[\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} &= \frac{\beta X^\rho X^{-\rho} \ln X + (1-\beta)Y^\rho X^{-\rho} \ln Y}{\beta X^\rho X^{-\rho} + (1-\beta)Y^\rho X^{-\rho}} \\&= \frac{\beta X^{\rho-\rho} \ln X + (1-\beta)(Y/X)^\rho \ln Y}{\beta X^{\rho-\rho} + (1-\beta)(Y/X)^\rho}\end{aligned}$$

(P.A.)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} &= \frac{\beta X^0 \ln X + (1-\beta)(Y/X)^0 \ln Y}{\beta X^0 + (1-\beta)(Y/X)^0} \\
 &= \frac{\beta \ln X + (1-\beta)(Y/X)^0 \ln Y}{\beta + (1-\beta)(Y/X)^0} \\
 &= \frac{\beta \ln X + 0}{\beta + 0} \\
 &= \frac{\beta \ln X}{\beta} \\
 &= \ln X
 \end{aligned}$$

SUBSTITUINDO (4) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) &= e^{\ln X} \\
 &= X
 \end{aligned}$$

NO CASO EM QUE $X > Y$ A EQUAÇÃO (2) FICARÁ COMO SE SEGUE:

MULTIPLICANDO A EQUAÇÃO (2) POR $\frac{\rho-Y}{\rho-Y}$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} &= \frac{\beta X^{\rho-Y} Y^Y \ln X + (1-\beta)Y^{\rho-Y} Y^Y \ln Y}{\beta X^{\rho-Y} Y^Y + (1-\beta)Y^{\rho-Y} Y^Y} \\
 &= \frac{\beta (X/Y)^Y \ln X + (1-\beta)Y^{\rho-Y} \ln Y}{\beta (X/Y)^Y + (1-\beta)Y^{\rho-Y}} \\
 &= \frac{\beta (X/Y)^Y \ln X + (1-\beta)Y^0 \ln Y}{\beta (X/Y)^Y + (1-\beta)Y^0} \\
 &= \frac{\beta (X/Y)^Y \ln X + (1-\beta) \ln Y}{\beta (X/Y)^Y + (1-\beta)}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \frac{\ln [\beta X^\rho + (1-\beta)Y^\rho]}{\rho} = \frac{0 + (1-\beta) \ln Y}{0 + (1-\beta)}$$

$$= \frac{(1-\beta) \ln Y}{(1-\beta)}$$

$$= \ln Y$$

(3)

SUBSTITUINDO (3) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\lim_{\rho \rightarrow -\infty} U(X, Y) = e^{\ln Y}$$

$$= Y$$

(P.E)

$$G_{YX} = \left(\frac{d \ln TMS_{YX}}{d \ln (X/Y)} \right)^{-1}$$

CALCULANDO A ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO PARA A FUNÇÃO COBB-

DOUGLAS:

$$G_{YX} = \left(\frac{d \ln TMS_{YX}}{d \ln (X/Y)} \right)^{-1}$$

$$G_{YX}^{-1} = \frac{d \ln TMS_{YX}}{d \ln (X/Y)}$$

$$\frac{\partial \ln TMS_{YX}}{\partial TMS_{YX}} \cdot d TMS_{YX}$$

$$= \frac{\partial \ln (X/Y)}{\partial (X/Y)} \cdot d (X/Y)$$

$$\sigma_{yx}^{-1} = \frac{\frac{1}{TMS_{yx}}}{\frac{1}{x/y}} \cdot \frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)}$$

$$= \left(\frac{1}{TMS_{yx}} \right) \left(\frac{x}{y} \right) \left[\frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)} \right]$$

(1)

CALCULANDO AS UTILIDADES MARGINAIS DE X E Y:

$$UMg_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$= \beta x^{\beta-1} y^{(1-\beta)}$$

$$UMg_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$= (1-\beta) x^\beta y^{-\beta}$$

CALCULANDO A TMS_{yx}:

$$TMS_{yx} = \frac{UMg_y}{UMg_x}$$

$$= \frac{(1-\beta) x^\beta y^{-\beta}}{\beta x^{\beta-1} y^{(1-\beta)}}$$

$$= \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) x^{\beta-(\beta-1)} y^{-\beta-(1-\beta)}$$

$$= \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) x^{\beta-\beta+1} y^{-\beta-1+\beta}$$

$$= \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) x^1 y^{-1}$$

$$= \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left(\frac{x}{y} \right)$$

(2)

CALCULANDO $\frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)}$:

$$\frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)} = \left[\left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left(\frac{x}{y} \right) \right]'$$

2023/1º

10

$$\frac{dTMS_{yx}}{d(X/Y)} = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)$$

(3)

SUBSTITUINDO (2) E (3) EM (1) OBTÉM-SE:

$$G_{yx}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \left(\frac{X}{Y} \right)^{\beta} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^{\beta}}$$

$$= 1$$

$$G_{yx} = (1)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

CALCULANDO A ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO PARA A FUNÇÃO LINEAR:

$$G_{yx} = \left(\frac{d \ln TMS_{yx}}{d \ln (X/Y)} \right)^{-1}$$

$$G_{yx}^{-1} = \frac{d \ln TMS_{yx}}{d \ln (X/Y)}$$

$$= \frac{\frac{\partial \ln TMS_{yx}}{\partial TMS_{yx}} \cdot d TMS_{yx}}{\frac{\partial \ln (X/Y)}{\partial (X/Y)} \cdot d (X/Y)}$$

$$= \frac{\frac{1}{TMS_{yx}}}{\frac{1}{X/Y}} \cdot \frac{d TMS_{yx}}{d (X/Y)}$$

(1)

D.O.A.

$$G_{yx}^{-1} = \left(\frac{1}{TMS_{yx}} \right) \left(\frac{x}{y} \right) \left(\frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)} \right)$$

CALCULANDO A TMS_{yx} :

$$\begin{aligned} UMg_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UMg_y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ &= (1-\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TMS_{yx} &= \frac{UMg_y}{UMg_x} \\ &= \frac{1-\beta}{\beta} \end{aligned}$$

(2)

CALCULANDO A $\frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)}$:

$$\begin{aligned} \frac{dTMS_{yx}}{d(x/y)} &= \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)' \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3)

SUBSTITUINDO (2) E (3) EM (1) OBTÉM-SE:

$$\begin{aligned} G_{yx}^{-1} &= \left(\frac{1}{\frac{1-\beta}{\beta}} \right) \left(\frac{x}{y} \right) (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{yx} &= (0)^{-1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 9:

2013/14

(12)

$$U(x_i) = \sum_i \beta_i \ln(x_i - \delta_i)$$

$$\sum_i \beta_i = 1$$

MONTANDO O LAGRANGIANO:

$$\mathcal{L}(x_i, \lambda) = U(x_i) + \lambda(W - Px)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \beta_i \left(\frac{1}{x_i - \delta_i} \right) - \lambda P_{x_i} = 0 \Rightarrow \lambda P_{x_i} = \beta_i \left(\frac{1}{x_i - \delta_i} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = W - P_{x_i} x_i = 0 \Rightarrow W = \sum P_{x_i} x_i \quad (2)$$

ABRINDO A EQUAÇÃO (1) OBTÉM-SE:

$$\lambda P_{x_i} (x_i - \delta_i) = \beta_i$$

$$\lambda P_{x_i} x_i - \lambda P_{x_i} \delta_i = \beta_i$$

$$\sum_i \lambda P_{x_i} x_i - \sum_i \lambda P_{x_i} \delta_i = \sum_i \beta_i$$

$$\lambda \sum_i P_{x_i} x_i - \lambda \sum_i P_{x_i} \delta_i = 1$$

$$\lambda W - \lambda \sum_i P_{x_i} \delta_i = 1$$

$$\lambda (W - \sum_i P_{x_i} \delta_i) = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{W - \sum_i P_{x_i} \delta_i} \quad (3)$$

SUBSTITUINDO (3) EM (1) OBTÉM-SE:

$$P_{x_i} \left(\frac{1}{W - \sum_i P_{x_i} \delta_i} \right) = \beta_i \left(\frac{1}{x_i - \delta_i} \right)$$

$$\frac{P_{X_i}}{W - \sum_i P_{X_i} \delta_i} = \frac{\beta_i}{X_i - \delta_i}$$

$$X_i - \delta_i = \left(\frac{\beta_i}{P_{X_i}} \right) (W - \sum_i P_{X_i} \delta_i)$$

$$X_i = \left(\frac{\beta_i}{P_{X_i}} \right) (W - \sum_i P_{X_i} \delta_i) + \delta_i$$

$$= \frac{\beta_i (W - \sum_i P_{X_i} \delta_i)}{P_{X_i}} + \delta_i$$

(4)

OBSELEVANDO A EQUAÇÃO (4) - EQUAÇÃO DE DEMANDA - CONCLUI-SE QUE HÁ UMA PARCELA DA DEMANDA QUE NÃO ESTÁ ASSOCIADA A RENDA E QUE PODE SER INTERPRETADA ECONOMICAMENTE COMO CONSUMO AUTÔNOMO.

EXERCÍCIO 10:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE - PMU

$$\max X^a \cdot Y^b \quad \text{s. a} \quad P_X X + P_Y Y = W$$

$$X \text{ e } Y \geq 0$$

MONTANDO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = X^a Y^b + \lambda (W - P_X X - P_Y Y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = a X^{a-1} Y^b - \lambda P_X = 0 \therefore \lambda = \frac{a X^{a-1} Y^b}{P_X} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = b X^a Y^{b-1} - \lambda P_Y = 0 \therefore \lambda = \frac{b X^a Y^{b-1}}{P_Y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = W - P_X X - P_Y Y = 0 \therefore W = P_X X + P_Y Y \quad (3)$$

SUPONDO QUE $X=0$ E $\frac{\partial L}{\partial X} < 0$ TEM-SE QUE:

$$\lambda < \frac{a \cdot x^{a-1} \cdot y^b}{P_X}$$

(4)

IGUALANDO AS EXPRESSÕES (2) E (4) TEM-SE QUE

$$\frac{a \cdot x^{a-1} \cdot y^b}{P_X} < \frac{b \cdot x^a \cdot y^{b-1}}{P_Y}$$

$$\frac{UMg_X}{P_X} < \frac{UMg_Y}{P_Y}$$

SENDO ASSIM, O CONSUMO ÓTIMO DO BEM X SERÁ IGUAL A ZERO

QUANDO O BENEFÍCIO CUSTO DO BEM X FOR MENOR DO QUE O DO BEM Y E, PORTANTO, O CONSUMIDOR GASTARÁ TODA A RENDA NO CONSUMO DO BEM Y.

$$\begin{aligned} W &= P_X \cdot X + P_Y \cdot Y \\ W &= P_X(0) + P_Y \cdot Y \\ W &= 0 + P_Y \cdot Y \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} W &= P_Y \cdot Y \\ P_Y \cdot Y &= W \\ Y &= \frac{W}{P_Y} \end{aligned} \right\}$$

CONSIDERANDO $u(X, Y) = a \cdot \ln X + b \cdot \ln Y$:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE - PMU:

$$\begin{aligned} \max \quad & a \cdot \ln X + b \cdot \ln Y \\ \text{s. a} \quad & P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = W \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

MONTANDO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = a \cdot \ln X + b \cdot \ln Y + \lambda (W - P_X \cdot X - P_Y \cdot Y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = a \cdot \frac{1}{X} - \lambda \cdot P_X = 0 \quad \therefore \quad \lambda = \frac{a \cdot X^{-1}}{P_X}$$

(1)

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = b \cdot \frac{1}{Y} - \lambda \cdot P_Y = 0 \therefore \lambda = \frac{b \cdot Y^{-1}}{P_Y}$$

(2) (12.7)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = W - P_X \cdot X - P_Y \cdot Y = 0 \therefore W = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y$$

(3)

SUPONDO $X=0$ E $\frac{\partial L}{\partial X} < 0$ TEM-SE QUE:

$$\frac{a \cdot X^{-1}}{P_X} < 0$$

(4)

IGUALANDO (2) E (4) OBTÉM-SE:

$$\frac{a \cdot X^{-1}}{P_X} < \frac{b \cdot Y^{-1}}{P_Y}$$

MAS UMA VEZ QUE,

$$a \cdot X^{-1} = \frac{\partial u(X, Y)}{\partial X} = UMg_X \quad \text{E} \quad b \cdot Y^{-1} = \frac{\partial u(X, Y)}{\partial Y} = UMg_Y$$

ENTÃO,

$$\frac{UMg_X}{P_X} < \frac{UMg_Y}{P_Y}$$

OU SEJA, O CONSUMO ÓTIMO DO BEM X PODE SER IGUAL A ZERO QUANDO O BENEFÍCIO CUSTO DO BEM X, DADO POR $\frac{UMg_X}{P_X}$, FOR MENOR DO QUE O DO BEM Y, DADO POR $\frac{UMg_Y}{P_Y}$. DESSA FORMA, O CONSUMIDOR GASTARÁ TODA A RENDA DELE NO CONSUMO DO BEM Y, POIS PELA LEI DE WALRAS SABE-SE QUE:

$$\begin{aligned} W &= P_X \cdot X + P_Y \cdot Y \\ &= P_X \cdot (0) + P_Y \cdot Y \\ &= 0 + P_Y \cdot Y \end{aligned}$$

$$\boxed{= P_Y \cdot Y}$$