

EXERCÍCIO 1:

1.A

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x)} \\ &= a x_1^{a-1} x_2^b \cdot \frac{x_1}{x_1^a x_2^b} \\ &= a x_1^{a-1} x_2^b \cdot x_1^{1-a} x_2^{-b} \end{aligned}$$

$$\boxed{= a}$$

$$E_2(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{f(x)}$$

$$\begin{aligned} &= b x_1^a x_2^{b-1} \cdot \frac{x_2}{x_1^a x_2^b} \\ &= b x_1^a x_2^{b-1} \cdot x_1^{-a} x_2^{1-b} \end{aligned}$$

$$\boxed{= b}$$

1.B

$f(x) = t^{a+b} x_1^a x_2^b$ 2) FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COM ESCALA

$$E(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial t} \cdot \frac{t}{f(x)}$$

$$= (a+b) t^{a+b-1} x_1^a x_2^b \cdot \frac{t}{t^{a+b} x_1^a x_2^b}$$

$$= (a+b) t^{a+b-1+1} \frac{x_1^a x_2^b}{t^{a+b} x_1^a x_2^b}$$

$$= (a+b) \frac{t^{a+b} x_1^a x_2^b}{t^{a+b} x_1^a x_2^b}$$

$$= a+b$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 &= E_1(x) + E_2(x) \\ &= a+b \end{aligned}$$

SENDO ASSIM,

$$\boxed{E(x) = \sum_{i=1}^2 E_i(x)}$$

EXERCÍCIO 2:

1.A

Verdadeiro, pois com retornos constantes de escala podem ocorrer duas situações. Por exemplo, pode acontecer do preço do produto P_Y ser igual ao preço do insumo P_X e, nesse caso, o lucro seria igual a zero.

$$\max \pi = P_Y \cdot X - P_X \cdot X$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = 0$$

$$P_Y = P_X$$

ou ainda, pode ocorrer que o preço do produto P_Y seja maior do que o preço do insumo P_X ($P_Y > P_X$) e, portanto, o lucro tenderá ao infinito estimulando a firma a produzir cada vez mais em busca de um lucro maior.

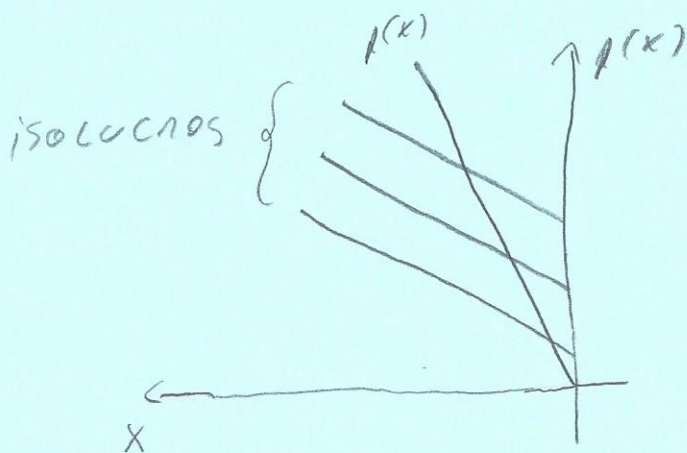
$$P_Y \cdot f(x^*) - P_X \cdot x^* = \pi^* > 0$$

Aumentando o insumo por um escalon λ ter-se:

$$P_Y \cdot f(\lambda x^*) - P_X \cdot \lambda x^* = \lambda \cdot P_Y \cdot f(x^*) - P_X \cdot \lambda x^*$$

$$= \lambda [P_Y \cdot f(x^*) - P_X \cdot x^*]$$

$$= \lambda \pi^* \text{ se } \lambda > 0 \therefore \lambda \pi^* = \pi^*$$



EXERCÍCIO 3:

TEOREMA EULER:

$$\underline{x} \cdot \nabla f(\underline{x}) = n \cdot f(\underline{x})$$

$n \Rightarrow$ GRAU DE HOMOGENEIDADE

$$\underline{x} \cdot \nabla f(\underline{x}) = (n) \cdot f(\underline{x})$$

$$(x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = f(\underline{x})$$

$$x_1 \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = f(\underline{x})$$

$$x_1 \cdot PM_{x_1} + \dots + x_n \cdot PM_{x_n} = f(\underline{x})$$

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot PM_{x_i} \quad \blacksquare$$

EXERCÍCIO 4:

TECNOLOGIA COM RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA:

$$\begin{aligned} Y(\lambda K, \lambda L) &= (\lambda K)^a \cdot (\lambda L)^b \\ &= \lambda^a K^a \cdot \lambda^b L^b \\ &= \lambda^{a+b} \cdot K^a \cdot L^b \\ &= \lambda \cdot K^a \cdot L^b \end{aligned}$$

$$= \lambda Y(K, L) \quad \blacksquare$$

TECNOLOGIA COM RETORNOS CRESCENTES DE ESCALA:

$$\begin{aligned} Y(\lambda K, \lambda L) &= (\lambda K)^a \cdot (\lambda L)^b \\ &= \lambda^a K^a \cdot \lambda^b L^b \\ &= \lambda^{a+b} \cdot K^a \cdot L^b \end{aligned}$$

$\rightarrow Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{a+b} \cdot Y(K, L)$
SE $\lambda > 0$ E $a+b > 1$, ENTÃO,

$$Y(\lambda K, \lambda L) > \lambda Y(K, L) \quad \blacksquare$$

TECNOLOGIA COM RETORNOS DECRESCENTE DE ESCALA:

SUPONHA $t > 0$ E $a + b < 0$

$$\begin{aligned} Y(tK, tL) &= (tK)^a \cdot (tL)^b \\ &= t^a \cdot K^a \cdot t^b \cdot L^b \\ &= t^{a+b} \cdot K^a \cdot L^b \\ &= t^{a+b} \cdot Y(K, L) \end{aligned}$$

COMO $t > 0$ E $a + b < 0$, ENTÃO:

$$Y(tK, tL) < tY(K, L) \quad \blacksquare$$

EXERCÍCIO 3:

$W \Rightarrow$ REMUNERAÇÃO DE L

$r \Rightarrow$ REMUNERAÇÃO DE K

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO:

$$\pi = P \cdot f(K, L) - W \cdot L - r \cdot K$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0$$

$$P \cdot \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} - W = 0$$

$$W = P \cdot PMGL$$

$$PMGL = \frac{W}{P}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0$$

$$P \cdot \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} - r = 0$$

$$r = P \cdot PMGK$$

$$PMGK = \frac{r}{P}$$

PELO TEOREMA DE EULER:

$$f(X) = \sum_{i=1}^n PMG_i \cdot X_i, \text{ ENTÃO:}$$

$$P \cdot Y = W \cdot L + r \cdot K \quad \blacksquare$$

$$f(K, L) = PMGL \cdot L + PMGK \cdot K$$

$$Y = \frac{W}{P} \cdot L + \frac{r}{P} \cdot K$$

EXERCÍCIO 6:

$$\sigma_{L,K} = \frac{\Delta(L/K)/(L/K)}{\Delta TTS/TTS}$$

$$= \frac{\Delta(L/K)}{(L/K)} \cdot \frac{TTS}{\Delta TTS}$$

$$= \frac{d(L/K)}{d TTS} \cdot \frac{TTS}{(L/K)} \quad \text{OU} \quad \sigma_{L,K} = \frac{d \ln(L/K)}{d \ln TTS}$$

CALCULANDO A TAXA TÉCNICA DE SUBSTITUIÇÃO - TTS:

$$TTS = \frac{dL}{dK}$$

$$= \frac{\partial Y / \partial K}{\partial Y / \partial L}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda} [\beta K^\rho + (1-\beta)L^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot [\beta K^\rho + (1-\beta)L^\rho]'}{\cancel{\lambda} [\beta K^\rho + (1-\beta)L^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot [\beta K^\rho + (1-\beta)L^\rho]'}$$

$$= \frac{\lambda \beta K^{\rho-1}}{\lambda (1-\beta) L^{\rho-1}}$$

$$= \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1}$$

$$= \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\rho}$$

$$\frac{1-\beta}{\beta} \cdot TTS = \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\rho}$$

$$\frac{L}{K} = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \cdot TTS\right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

LINEARIZANDO (1) TEM-SE:

3.1

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{L}{K}\right) &= \ln\left(\frac{1-\beta}{\beta} \cdot TTS\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \\ &= \frac{1}{1-\rho} \ln\left(\frac{1-\beta}{\beta} \cdot TTS\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho} \ln \frac{1-\beta}{\beta} + \frac{1}{1-\rho} \ln TTS\end{aligned}$$

LOGO,

$$\epsilon_{L,K} = \frac{d \ln(L/K)}{d \ln(TTS)}$$

$$= \frac{1}{1-\rho}$$

A ELASTICIDADE DE SUBSTITUIÇÃO ENTRE OS INSUMOS K E L MEDE A FACILIDADE DE TROCA ENTRE ESSES DOIS INSUMOS ALÉM DE FORNECER A CURVATURA DA ISOQUANTIA. NOTA-SE PELA EQUAÇÃO AO LADO QUE ESSA DEPENDE DO VALOR ρ .

EXERCÍCIO 7:

$$\begin{aligned}Y(K, L) &= [\beta(K)^{\rho} + (1-\beta)(L)^{\rho}]^{\frac{\theta}{\rho}} \\ &= [1^{\rho} \beta K^{\rho} + 1^{\rho} (1-\beta) L^{\rho}]^{\frac{\theta}{\rho}} \\ &= \{1^{\rho} [\beta K^{\rho} + (1-\beta) L^{\rho}]\}^{\frac{\theta}{\rho}} \\ &= 1^{\theta} [\beta K^{\rho} + (1-\beta) L^{\rho}]\end{aligned}$$

SENDO ASSIM,

- * A TECNOLOGIA EXIBIRÁ RETORNOS CRESCENTES $\frac{\partial F}{\partial E}$ ESCALA QUANDO $\theta > 1$;
- * A TECNOLOGIA EXIBIRÁ RETORNOS DECRESCENTES $\frac{\partial F}{\partial E}$ ESCALA QUANDO $\theta < 1$; E
- * A TECNOLOGIA EXIBIRÁ RETORNOS CONSTANTES $\frac{\partial F}{\partial E}$ ESCALA QUANDO $\theta = 1$.

FUNÇÃO LUCRO:

$$\pi = P \cdot Y - r \cdot K - w \cdot L$$

2013/14

(4)

$$\pi = P \cdot [\beta K^{\theta} + (1-\beta)L^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}} - r \cdot K - w \cdot L$$

A FUNÇÃO LUCRO SERÁ DEFINIDA QUANDO A FUNÇÃO ESTIVER OPERANDO COM RETORNOS DECRESCENTES DE ESCALA, ISTO É, QUANDO $\theta < 1$. POIS COM RETORNOS CRESCENTES DE ESCALA ($\theta > 1$) E RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA ($\theta = 1$) A FUNÇÃO LUCRO É INDEFINIDA UMA VEZ QUE EM AMBAS AS ECONOMIAS DE ESCALA NÃO É POSSÍVEL MAXIMIZAR O LUCRO.

EXERCÍCIO 8:

$$\pi = P_Y \cdot X^a - P_X \cdot X$$

(1)

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = a \cdot P_Y \cdot X^{a-1} - P_X = 0$$

$$a \cdot P_Y \cdot X^{a-1} - P_X = 0$$

$$a \cdot P_Y \cdot X^{a-1} = P_X$$

$$X^{a-1} = \frac{P_X}{a \cdot P_Y}$$

$$X^* = \left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{1}{a-1}}$$

(2)

SUBSTITUINDO (1) EM (2):

$$\pi^* = P_Y \cdot \left[\left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{1}{a-1}} \right]^a - P_X \cdot \left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{1}{a-1}}$$

$$= P_Y \cdot \left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{a}{a-1}} - P_X \cdot \left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{1}{a-1}}$$

(3)

LOGO,

$$\pi^*(P_Y, P_X) = P_Y \cdot \left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{a}{a-1}} - P_X \cdot \left(\frac{P_X}{a \cdot P_Y} \right)^{\frac{1}{a-1}}$$

$$\pi^*(x p_y, x p_x) = x \left[p_y \left(\frac{p_x}{a \cdot p_y} \right)^{\frac{a}{a-1}} - p_x \left(\frac{p_x}{a \cdot p_y} \right)^{\frac{1}{a-1}} \right] \quad \blacksquare$$

4.9

MANIPULAÇÕES MATEMÁTICAS EM (3):

$$\begin{aligned} \pi^* &= p_y \cdot p_y^{\frac{a}{1-a}} \cdot \left(\frac{p_x}{a} \right)^{\frac{a}{a-1}} - p_x \cdot \left(\frac{p_x}{a} \right)^{\frac{1}{a-1}} \cdot p_y^{\frac{1}{1-a}} \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot \left(\frac{p_x}{a} \right)^{\frac{a}{a-1}} - p_x \left(\frac{p_x}{a} \right)^{\frac{1}{a-1}} \cdot p_y^{\frac{1}{1-a}} \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{a}{1-a}} - p_x \cdot p_x^{\frac{1}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_y^{\frac{1}{1-a}} \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{a}{1-a}} - p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_y^{\frac{1}{1-a}} \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \left(a^{\frac{a}{1-a}} - a^{\frac{1}{1-a}} \right) \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \left(\frac{a^{\frac{a}{1-a}}}{a^{\frac{1}{1-a}}} - 1 \right) \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \left(a^{\frac{a-1}{1-a}} - 1 \right) \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \left(a^{(-1) \frac{a-1}{a-1}} - 1 \right) \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \\ &= p_y^{\frac{1}{1-a}} \cdot p_x^{\frac{a}{a-1}} \cdot a^{\frac{1}{1-a}} \left(\frac{1-a}{a} \right) \\ &= p_y^{\alpha} \cdot p_x^{-\alpha a} \cdot a^{\alpha} \left(\frac{1-a}{a} \right) \\ &= p_y^{\alpha} \cdot p_x^{-\alpha a} \cdot A \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{1-a} ; -\alpha a = \frac{a}{a-1}$$

$$a^{\alpha} \left(\frac{1-a}{a} \right) = A$$

VERIFICANDO A CONVEXIDADE:

$$\pi_{p_y}^{*'} = \alpha \cdot p_y^{\alpha-1} \cdot p_x^{-\alpha a} \cdot A \quad \pi_{p_x}^{*'} = -\alpha \cdot a \cdot p_y^{\alpha} \cdot p_x^{-\alpha a-1} \cdot A$$

$$\pi_{p_y p_y}^{*''} = \alpha(\alpha-1) \cdot p_y^{\alpha-2} \cdot p_x^{-\alpha a} \cdot A \quad \pi_{p_y p_x}^{*''} = -\alpha^2 \cdot a \cdot p_y^{\alpha-1} \cdot p_x^{-\alpha a-1} \cdot A$$

2013/1-0

3

$$\pi_{P_x P_y}^{*''} = \pi_{P_y P_x}^{*''} \quad \text{e, PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad \pi_{P_x P_x}^{*''} = -\alpha \cdot \alpha(-\alpha \cdot \alpha - 1) P_y^\alpha \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A$$

OBTENDO A MATRIZ HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} \pi_{P_x P_x}^{*''} & \pi_{P_x P_y}^{*''} \\ \pi_{P_y P_x}^{*''} & \pi_{P_y P_y}^{*''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \cdot \alpha(-\alpha \cdot \alpha - 1) P_y^\alpha \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A & -\alpha^2 \cdot \alpha \cdot P_y^{\alpha-1} \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 1} \cdot A \\ -\alpha^2 \cdot \alpha \cdot P_y^{\alpha-1} \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 1} \cdot A & \alpha(\alpha-1) \cdot P_y^{\alpha-2} \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha} \cdot A \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS DETERMINANTES LÍDERES:

$$|H_1| = | -\alpha \cdot \alpha(-\alpha \cdot \alpha - 1) P_y^\alpha \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A |$$

$$= -\alpha \cdot \alpha(-\alpha \cdot \alpha - 1) P_y^\alpha \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -\alpha \cdot \alpha(-\alpha \cdot \alpha - 1) P_y^\alpha \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A & -\alpha^2 \cdot \alpha \cdot P_y^{\alpha-1} \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 1} \cdot A \\ -\alpha^2 \cdot \alpha \cdot P_y^{\alpha-1} \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha - 1} \cdot A & \alpha(\alpha-1) \cdot P_y^{\alpha-2} \cdot P_x^{-\alpha \cdot \alpha} \cdot A \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha \cdot \alpha(-\alpha \cdot \alpha - 1) \alpha(\alpha-1) P_y^{2\alpha-2} \cdot P_x^{-2\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A^2 - \alpha^4 \cdot \alpha^2 P_y^{2\alpha-2} \cdot P_x^{-2\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A^2$$

$$= P_y^{2\alpha-2} \cdot P_x^{-2\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A^2 [(\alpha^2 \alpha^2 + \alpha \cdot \alpha)(\alpha^2 - \alpha) - \alpha^4 \cdot \alpha^2]$$

$$= P_y^{2\alpha-2} \cdot P_x^{-2\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A^2 [\cancel{\alpha^4 \alpha^2} - \alpha^3 \alpha^2 + \alpha^3 \alpha - \alpha^2 \alpha - \cancel{\alpha^4 \cdot \alpha^2}]$$

$$= P_y^{2\alpha-2} \cdot P_x^{-2\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A^2 [\alpha^2 \alpha(-\alpha \cdot \alpha + \alpha - 1)]$$

$$= P_y^{2\alpha-2} \cdot P_x^{-2\alpha \cdot \alpha - 2} \cdot A^2 \cdot \alpha^3 \alpha [\alpha(-\alpha + 1) - 1]$$

$$\text{ABRINDO } \alpha(-\alpha + 1) - 1:$$

(5.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha} (-\alpha + 1) - 1 &= \frac{-\alpha + 1}{1-\alpha} - 1 \\ &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha} - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

LOGO,

$$|H_2| = 0$$

SENDO ASSIM, CALCULA-SE OS MEMBRES PRINCIPAIS. UMA VEZ QUE $|H_1|$ E $|H_2|$ JÁ FORAM CALCULADOS RESTA APENAS TERMINAR $|H_3|$. ENTÃO:

$$\begin{aligned} |H_3| &= |\alpha(\alpha-1) p_Y^{\alpha-2} \cdot p_X^{-\alpha\alpha} \cdot A| \\ &= \alpha(\alpha-1) p_Y^{\alpha-2} \cdot p_X^{-\alpha\alpha} \cdot A > 0 \end{aligned}$$

ENTÃO, COMO TODOS OS MEMBRES PRINCIPAIS SÃO MAIORES OU IGUAIS A ZERO IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É SEMIDEFINIDA POSITIVA E, DESSA FORMA, A FUNÇÃO LUCRO É CONVEXA.

EXERCÍCIO 9:

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LUCRO:

1.^a) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS PRODUTOS E NÃO CRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS.

PROVA:

SUPONHA Y SENDO UM VETOR DE PRODUTO LÍQUIDO MAXIMIZADOR DO LUCRO EM P , ENTÃO, $\pi(P) = P \cdot Y$, POR SUA VEZ, $Y' \in P'$, LOGO, $\pi(P') = P' \cdot Y'$

PELA DEFINIÇÃO DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO TEM-SE QUE $P' \cdot Y' \geq P \cdot Y$ QUANDO $P'_i \geq P_i, \forall i$, E SUPONDO UM PRODUTO LÍQUIDO POSITIVO, OU SEJA, $Y_i \geq 0$. POR SUA VEZ, $P' \cdot Y \geq P \cdot Y$ QUANDO $P'_i \leq P_i, \forall i$, E CONSIDERANDO UM PRODUTO LÍQUIDO NEGATIVO ($Y_i \leq 0$), ISTO É, O GASTO DE INSUMOS É SUPERIOR A PRODUÇÃO DE PRODUTOS. LOGO,

$$\pi(P') = P' \cdot Y' \geq P' \cdot Y \geq P \cdot Y = \pi(P) \quad \blacksquare$$

2ª) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS.

PROVA:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda P_Y, \lambda P_X) &= \lambda P_Y \cdot Y - \lambda P_X \cdot X \\ &= \lambda (P_Y \cdot Y - P_X \cdot X) \\ &= \lambda \pi(P) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

CONSIDERANDO $P_Y \cdot Y$ E $P_X \cdot X$ COMO VETORES.

3ª) CONVEXA NOS PREÇOS.

PROVA:

SUPONHA QUE Y, Y' E Y'' SEJAM VETORES DE PRODUTO LÍQUIDO ($Y_i - X_i, \forall i$) E QUE P, P' E P'' SEJAM VETORES DE PREÇO LÍQUIDO ($P_Y - P_X, \forall i$). LOGO,

$$\begin{aligned} \pi(P'') &= P'' \cdot Y'' \\ &= (\lambda P + (1-\lambda)P') \cdot Y'' \\ &= \lambda P \cdot Y'' + (1-\lambda)P' \cdot Y'' \end{aligned} \quad (1)$$

PELA DEFINIÇÃO DE MAXIMIZAÇÃO DE LUCRO TEM-SE:

$$\lambda P \cdot Y'' \leq \lambda P \cdot Y = \lambda \pi(P) \quad (2)$$

$$(1-\lambda)P' \cdot Y'' \leq (1-\lambda)P' \cdot Y' = (1-\lambda)\pi(P') \quad (3)$$

SOMANDO AS DESIGUALDADES (2) E (3):

$$\lambda p \cdot y'' + (1-\lambda) p' \cdot y'' \leq \lambda \pi(p) + (1-\lambda) \pi(p')$$

(4) 6.9

SUBSTITUINDO (1) EM (4):

$$\pi(p'') \leq \lambda \pi(p) + (1-\lambda) \pi(p') \quad \blacksquare$$

4.^a) CONTÍNUA EM p .

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO CUSTO:

1.^a) NÃO DECRESCENTE EM w .

PROVA:

SUPONHA QUE x E x' SÃO VETORES DE INSUMOS E QUE w E w' SÃO VETORES PREÇOS DOS INSUMOS. PELA DEFINIÇÃO DE MINIMIZAÇÃO DE CUSTO TEM-SE QUE $w x \leq w x'$. E QUE $w x' \leq w' x'$ QUANDO $w \leq w'$. ENTÃO,

$$w x \leq w x' \leq w' x' \quad \blacksquare$$

2.^a) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w .

PROVA:

$$C(\lambda w, x) = \sum_{i=1}^m \lambda w_i \cdot x_i \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^m w_i \cdot x_i$$

$$= \lambda C(w, x) \quad \blacksquare$$

3.^a) CÔNCAVA NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w .

PROVA:

SUPONHA (w, x) E (w', x') E QUE $w'' = \lambda w + (1-\lambda) w'$ E

QUE $\lambda \in [0, 1]$. PELA DEFINIÇÃO DE MINIMIZAÇÃO DE CUSTO QUE:

$$\begin{aligned} C(w'', x) &= w'' \cdot x'' \\ &= [\lambda w + (1-\lambda) w'] \cdot x'' \\ &= \lambda w \cdot x'' + (1-\lambda) w' \cdot x'' \end{aligned}$$

Ainda pela definição de custo mínimo tem-se que $w \cdot x'' \geq w \cdot x$ e $w' \cdot x'' \geq w' \cdot x'$. Logo,

$$C(w'', x) \geq \lambda C(w, x) + (1-\lambda)C(w', x) \quad \blacksquare$$

4a) CONTINUA NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w:

EXERCÍCIO 10:

10.A) $Y(K, L) = \sqrt{K+L}$

$$Y(K, L) = \sqrt{K+L} \\ = (K+L)^{1/2}$$

FUNÇÃO LUCRO:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO - PML:

$$\max \pi = P \cdot Y - r \cdot K - w \cdot L \\ = P \cdot (K+L)^{1/2} - r \cdot K - w \cdot L$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \therefore \frac{1}{2} \cdot P \cdot (K+L)^{-1/2} - r = 0 \therefore \frac{1}{2} \cdot P \cdot (K+L)^{-1/2} = r \quad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \therefore \frac{1}{2} \cdot P \cdot (K+L)^{-1/2} - w = 0 \therefore \frac{1}{2} \cdot P \cdot (K+L)^{-1/2} = w \quad (2)$$

IGUALANDO (1) E (2):

$$r = w$$

CALCULANDO A FUNÇÃO OFERTA:

$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot (K+L)^{-1/2} = w \quad \rightarrow \quad (K+L)^{1/2} = \frac{P}{2w}$$

$$(K+L)^{-1/2} = \frac{2w}{P}$$

$$Y = \frac{P}{2w}$$

ou

$$Y = \frac{P}{2r}$$

pois $r = w$

OBTENDO A FUNÇÃO LUCRO:

(7.9)

$$\pi = P \cdot Y - r \cdot K - w \cdot L$$

$$= P \cdot \frac{P}{2w} - w \cdot K - w \cdot L$$

pois $w = r$

$$= \frac{P^2}{2w} - w(K+L)$$

$$= \frac{P^2}{2w} - w \cdot \frac{P^2}{4w}$$

pois $(K+L)^{1/2} = \frac{P}{2w}$

$$= \frac{P^2}{2w} - \frac{P^2}{4w}$$

$$= \frac{2P^2 - P^2}{4w}$$

$$\pi(P, w) = \frac{P^2}{4w}$$

VERIFICANDO AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LUCRO:

1ª) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS PRODUTOS E NÃO CRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = \frac{1}{2} \frac{P}{w}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{P}{w} > 0 \quad \text{OU SEJA, NÃO DECRESCENTE NO PREÇO DO PRODUTO.}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = - \frac{P^2}{4w^2} < 0 \quad \text{OU SEJA, NÃO CRESCENTE NO PREÇO DO INSUMO.}$$

2ª) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS:

$$\pi(\lambda P, \lambda w) = \frac{(\lambda P)^2}{4(\lambda w)}$$

$$= \frac{\lambda^2 P^2}{4\lambda w}$$

$$\pi(\lambda P, \lambda w) = \lambda \frac{P^2}{4w}$$

$$= \lambda \pi(P, w)$$

3^{ra} CONVEXA NO PREÇO:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = \frac{P}{2w}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -\frac{P^2}{4w^2}$$

$$\pi''_{PP} = \frac{1}{2w}$$

$$\pi''_{Pw} = -\frac{P}{2w^2}$$

$$\pi''_{wP} = \pi''_{Pw} \Rightarrow \text{PELO TEOREMA DE YOUNG} \quad \pi''_{ww} = \frac{P^2}{2w^3}$$

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} \pi''_{PP} & \pi''_{Pw} \\ \pi''_{Pw} & \pi''_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2w} & -\frac{P}{2w^2} \\ -\frac{P}{2w^2} & \frac{P^2}{2w^3} \end{bmatrix}$$

CALCULANDO OS VALORES PRINCIPAIS:

EXISTEM DOIS VALORES PRINCIPAIS DE 1^o ORDEM:

$$\Delta_1 = \left| \frac{1}{2w} \right|$$

$$\Delta_2 = \left| \frac{P^2}{2w^3} \right|$$

$$= \frac{1}{2} w > 0$$

$$= \frac{P^2}{2w^3} > 0$$

EXISTE APENAS UM VALOR PRINCIPAL DE 2^o ORDEM:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2w} & -\frac{P}{2w^2} \\ -\frac{P}{2w^2} & \frac{P^2}{2w^3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 0$$

$$= \left(\frac{1}{2w} \right) \left(\frac{P^2}{2w^3} \right) - \left(-\frac{P}{2w^2} \right)^2$$

$$= \frac{P^2}{4w^4} - \frac{P^2}{4w^4}$$

(P.A)

UMA VEZ QUE TODOS OS VALORES PRINCIPAIS SÃO MAIORES DO
IGUAIS A ZERO IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA É SEMIDEFINIDA
POSITIVA E, PORTANTO, A FUNÇÃO LUCRO É CONCAVA.

4.^a) CONTÍNUA NOS PREÇOS:

FUNÇÃO CUSTO:

$$Y = (K+L)^{1/2}$$

PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO - PMC:

$$\min C = r \cdot K + w \cdot L \quad \text{s. a} \quad Y = (K+L)^{1/2}$$

PORTANTO A LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = r \cdot K + w \cdot L + \lambda [Y - (K+L)^{1/2}]$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \therefore r - \lambda \frac{1}{2} (K+L)^{-1/2} = 0 \therefore r = \frac{\lambda}{2} (K+L)^{-1/2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \therefore w - \lambda \frac{1}{2} (K+L)^{-1/2} = 0 \therefore w = \frac{\lambda}{2} (K+L)^{-1/2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \therefore Y - (K+L)^{1/2} = 0 \therefore Y = (K+L)^{1/2}$$

IGUALANDO (1) E (2):

$$r = w$$

(3)

CALCULANDO A FUNÇÃO CUSTO:

$$C(w, x) = r \cdot K + w \cdot L$$

$$= w \cdot K + w \cdot L$$

POIS $r = w$

$$= w(K+L)$$

VERIFICANDO AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO CUSTO:

1ª) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w :

$$\frac{\partial C}{\partial w} = (K+L) > 0 \quad \text{OU SEJA, NÃO DECRESCENTE EM } w.$$

2ª) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w :

$$C(\lambda w, x) = \lambda w \cdot (K+L)$$

$$= \lambda C(w, x)$$

3ª) CÔNCAVA NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w :

UMA VEZ QUE A FUNÇÃO CUSTO OBTIDA É LINEAR IMPLICA QUE ESSA É CÔNCAVA E CONVEXA AO MESMO TEMPO.

4ª) CONTÍNUA EM w :

10.3) $Y(K, L) = K^\alpha L^\beta$

FUNÇÃO LUCRO:

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO - PML:

$$\max \pi = P \cdot Y - r \cdot K - w \cdot L$$

$$= P \cdot K^\alpha L^\beta - r \cdot K - w \cdot L$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

(9.9)

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \therefore \alpha \cdot P \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} - r = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \therefore \beta \cdot P \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1} - w = 0 \quad (2)$$

CALCULANDO A DEMANDA ÓTIMA POR K (MANIPULANDO (1)):

$$\alpha \cdot P \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} = r$$

$$\alpha \cdot P \cdot Y = \frac{r}{K^{1-\alpha}}$$

$$K^* = \frac{\alpha \cdot P \cdot Y}{r}$$

→ DEMANDA PELO FATOR DE PRODUÇÃO K.

CALCULANDO A DEMANDA ÓTIMA POR L (MANIPULANDO (2)):

$$\beta \cdot P \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1} = w$$

$$\beta \cdot P \cdot Y = \frac{w}{L^{1-\beta}}$$

$$L^* = \frac{\beta \cdot P \cdot Y}{w}$$

→ DEMANDA PELO FATOR DE PRODUÇÃO L.

CALCULANDO A FUNÇÃO DE OFERTA DO PRODUTO:

$$Y = K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

$$= \left(\frac{\alpha \cdot P \cdot Y}{r} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta \cdot P \cdot Y}{w} \right)^{\beta}$$

$$= \frac{\alpha^{\alpha} \cdot P^{\alpha} \cdot Y^{\alpha}}{r^{\alpha}} \cdot \frac{\beta^{\beta} \cdot P^{\beta} \cdot Y^{\beta}}{w^{\beta}}$$

$$= P^{\alpha+\beta} \cdot Y^{\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{w} \right)^{\beta}$$

$$\frac{Y}{Y^{\alpha+\beta}} = P^{\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{w} \right)^{\beta}$$

$$Y = \left[P^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{w} \right)^{\beta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

OBTENDO A FUNÇÃO LUCRO:

$$\begin{aligned}
 \pi^* &= P \cdot Y^* - r \cdot K^* - w \cdot L^* \\
 &= P \cdot Y^* - r \cdot \frac{\alpha \cdot P \cdot Y^*}{r} - w \cdot \frac{\beta \cdot P \cdot Y^*}{w} \\
 &= P \cdot Y^* - \alpha \cdot P \cdot Y^* - \beta \cdot P \cdot Y^* \\
 &= P \cdot Y^* (1 - \alpha - \beta) \\
 &= P \left[P^{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1 - \alpha - \beta) \\
 &= P \cdot P^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1 - \alpha - \beta) \\
 &= P^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1 - \alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

VERIFICANDO AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LUCRO:

1ª) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS PRODUTOS E NÃO CRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi^*}{\partial P} &= \frac{1}{1-\alpha-\beta} P^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\
 &= P^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} > 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \cdot P^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{-1} (1-\alpha-\beta)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -\beta \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \cdot \beta \cdot w^{-\beta-1} \right] < 0 \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^*}{\partial n} &= \frac{1}{1-\alpha-\beta} \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]' (1-\alpha-\beta) \\ &= -\alpha \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\alpha^\alpha \cdot n^{-\alpha-1} \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right] < 0 \end{aligned}$$

2^a) HOMOGENEIA DEGRADO 1 NOS PREÇOS:

$$\begin{aligned} \pi(p, w) &= (p \cdot p)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\ &= p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[p^{-\alpha} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha p^{-\beta} \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\ &= p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[p^{-\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\ &= p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \cdot p^{\frac{-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\ &= p^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}} \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\ &= p \cdot p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{n} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{w} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} (1-\alpha-\beta) \\ &= p \pi(p, w) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3^a) CONVECA NOS PREÇOS:

4^a) CONTÍNUA EM P:FUNÇÃO CUSTO:

$$Y = K^{\alpha} L^{\beta}$$

PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO - PMC:

$$\min C = r \cdot K + w \cdot L \quad \text{s. a} \quad Y = K^{\alpha} L^{\beta}$$

MONTANDO A LAGRANGIANA:

$$P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = W$$

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = r \cdot K + w \cdot L + \lambda (Y - K^{\alpha} L^{\beta})$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \therefore r - \alpha \lambda K^{\alpha-1} L^{\beta} = 0 \therefore \lambda = \frac{r}{\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \therefore w - \beta \lambda K^{\alpha} L^{\beta-1} = 0 \therefore \lambda = \frac{w}{\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \therefore Y - K^{\alpha} L^{\beta} = 0 \therefore Y = K^{\alpha} L^{\beta} \quad (3)$$

IGUALANDO (1) E (2):

$$\frac{\alpha}{\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}} = \frac{w}{\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}}$$

11.9

$$\frac{K^{\alpha}}{K^{\alpha-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \cdot \frac{L^{\beta}}{L^{\beta-1}}$$

$$K = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \cdot L$$

(4)

SUBSTITUINDO (4) EM (3):

$$Y = \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \cdot L \right)^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \right)^{\alpha} \cdot L^{\alpha+\beta}$$

$$L^{\alpha+\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{Y}{w} \right)^{\alpha} \cdot Y$$

$$L = \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{Y}{w} \right)^{\alpha} \cdot Y \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

DEMANDA PELO FATOR DE PRODUÇÃO L

(5)

SUBSTITUINDO (5) EM (4):

$$K = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \cdot \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{Y}{w} \right)^{\alpha} \cdot Y \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{Y}{w} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{Y}{w} \right)^{-\alpha-\beta} Y \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \right)^{\beta} \cdot Y \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

DEMANDA PELO FATOR DE PRODUÇÃO K

(6)

OBTEMOS A FUNÇÃO CUSTO:

$$C(p, x) = \alpha \cdot K + w \cdot L$$

$$= \alpha \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{w}{\alpha} \cdot L + w \cdot L$$

$$C(p, x) = \frac{q \cdot w \cdot L}{\beta} + w \cdot L$$

$$= w \cdot L \left(\frac{q}{\beta} + 1 \right)$$

$$= w \cdot L \left(\frac{q + \beta}{\beta} \right)$$

$$= w \cdot \left[\left(\frac{\beta}{q} \cdot \frac{1}{w} \right)^q \cdot Y \right]^{\frac{1}{q+\beta}} \left(\frac{q + \beta}{\beta} \right)$$

$$= w \cdot \left(\frac{\beta}{w} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} (q + \beta) \cdot \beta^{-1} \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

$$= w \cdot \beta^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot w^{-\frac{q}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} (q + \beta) \cdot \beta^{-1} \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

$$= w^{\frac{\beta}{q+\beta}} \cdot \beta^{\frac{-\beta}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot (q + \beta) \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

$$= \left(\frac{w}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot (q + \beta) \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

VERIFICANDO AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO CUSTO:

1ª) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w:

$$\frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\beta}{q+\beta} \cdot w^{\frac{-q}{q+\beta}} \cdot \beta^{\frac{-\beta}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot (q + \beta) \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

$$= \beta^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot w^{\frac{-q}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

$$= Y^{\frac{1}{q+\beta}} \cdot \left(\frac{\beta}{w} \cdot \frac{1}{q} \right)^{\frac{q}{q+\beta}} > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = \frac{q}{q+\beta} \cdot \left(\frac{w}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{q+\beta}} \cdot n^{\frac{-\beta}{q+\beta}} \cdot q^{\frac{-q}{q+\beta}} \cdot (q + \beta) \cdot Y^{\frac{1}{q+\beta}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = \alpha^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \gamma^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \gamma^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{w}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} > 0$$

(12.A)

2^a) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w:

$$C(\lambda w, x) = \left(\frac{\lambda w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{\lambda \alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta) \gamma^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \lambda^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta) \gamma^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= \lambda^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$= \lambda \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$= \lambda C(w, x)$$

3^a) CONCAVA NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w:

4^a) CONTÍNUA EM w:

10.C $Y(K, L) = \sqrt{\min\{K, L\}}$

$$Y(K, L) = (\min\{K, L\})^{1/2}$$

$$K < L \text{ ou } L < K \text{ ou } K = L \therefore \min = K = L$$

PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO - PMC:

$$\pi = P \cdot Y - r \cdot K - w \cdot L$$

$$= P \cdot K^{1/2} - r \cdot K - w \cdot K$$

$$= P \cdot K^{1/2} - K(r + w)$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \therefore \frac{1}{2} P \cdot K^{-1/2} - r - w = 0 \therefore K = \left[\frac{2(r + w)}{P} \right]^{-2}$$

$$K^* = \frac{P^2}{4(r + w)^2} = L^*$$

CALCULANDO A FUNÇÃO DE OFERTA DO PRODUTO:

$$Y^* = K^{1/2}$$

$$= \left[\frac{P^2}{4(r + w)^2} \right]^{1/2}$$

$$= \left\{ \left[\frac{P}{2(r + w)} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{P}{2(r + w)}$$

OBTENDO A FUNÇÃO LUCRO:

(73.9)

$$\pi^* = p \cdot y^* - r \cdot K^* - w \cdot L^*$$

$$= p \cdot \frac{p}{2(r+w)} - r \left(\frac{p^2}{4(r+w)^2} \right) - w \left(\frac{p^2}{4(r+w)^2} \right)$$

$$= \frac{p^2}{2(r+w)} - \cancel{(r+w)} \cdot \left[\frac{p^2}{4(r+w)^2} \right]$$

$$= \frac{p^2}{2(r+w)} - \frac{p^2}{4(r+w)}$$

$$= \frac{2p^2 - p^2}{4(r+w)}$$

$$= \frac{p^2}{4(r+w)}$$

VERIFICANDO AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LUCRO:

1.^a) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS PRODUTOS E NÃO CRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = \frac{p}{2(r+w)} > 0 \quad \text{OU SEJA, NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS PRODUTOS.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi^*}{\partial r} &= - \frac{p^2}{4(r+w)^2} < 0 \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial w} &= - \frac{p^2}{4(r+w)^2} < 0 \end{aligned} \right\} \text{OU SEJA, NÃO CRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS.}$$

2.^a) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS:

LISTA V MICROECONOMIA I
2013/14^o

(14)

$$\begin{aligned}\pi(\lambda P, \lambda w) &= \frac{(P\lambda)^2}{4(\lambda r + \lambda w)} \\ &= \frac{P^2 \lambda^2}{4\lambda(r+w)} \\ &= \lambda \frac{P^2}{4(r+w)} \\ &= \lambda \pi(P, w)\end{aligned}$$

3.^a) CONVEXA NOS PREÇOS:

4.^a) CONTÍNUA EM P:

FUNÇÃO CUSTO:

$$Y(K, L) = \sqrt{\min\{K, L\}}$$

14.A

PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO - PMC:

$$C = r \cdot K + w \cdot L \quad \text{s. a} \quad Y = (\min\{K, L\})^{1/2} \therefore Y^2 = K^* = L^*$$

$$= r \cdot Y^2 + w \cdot Y^2$$

$$= (r + w) Y^2$$

VERIFICANDO AS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO CUSTO:

1^a) NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial r} = Y^2 > 0 \\ \frac{\partial C}{\partial w} = Y^2 > 0 \end{array} \right\} \text{OU SEJA, NÃO DECRESCENTE NOS PREÇOS DOS INSUMOS.}$$

2^a) HOMOGÊNEA DE GRAU 1 NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w :

$$\begin{aligned} C(tw, x) &= (tr + tw) Y^2 \\ &= t(r + w) Y^2 \\ &= tC(w, x) \end{aligned}$$

3^a) CÔNCAVA NOS PREÇOS DOS INSUMOS - w :

A FUNÇÃO CUSTO É LINEAR E, SENDO ASSIM, É CÔNCAVA E CONVEXA AO MESMO TEMPO.

4^a) CONTÍNUA EM w :

EXERCÍCIO 11:

PELO LEMA SHEPARD TEA-SE QUE:

$$X(P_X, Y) = \frac{\partial C(\cdot)}{\partial P_X}$$

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial C(\cdot)}{\partial P_X} \right)}{\partial Y} = \frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial P_X \partial Y}$$

PELO TEOREMA DE YOUNG:

$$\frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial P_X \partial Y} = \frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial Y \partial P_X}$$

LOGO,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial P_X \partial Y} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial C(\cdot)}{\partial Y} \right)}{\partial P_X} \\ &= \frac{\partial CM_g}{\partial P_X} \end{aligned}$$

PORTANTO,

$$\frac{\partial X(P_X, Y)}{\partial Y} = \frac{\partial CM_g}{\partial P_X} > 0$$

EXERCÍCIO 12:

PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DO CUSTO - PMC:

$$\min d = C(x) + \lambda (\bar{Y} - f(x))$$

CONDIÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM - CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \therefore \frac{\partial C(x)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

Logo,

$$\lambda \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial C(x)}{\partial x}$$

$$\lambda = \frac{\partial C(x)}{\partial f(x)}$$

$$\lambda = CMg \quad \blacksquare$$

EXERCÍCIO 13:

O CONJUNTO DE ISOQUANTAS SERÁ CONVEJO SE, E SOMENTE SE, A FUNÇÃO $f(K, L)$ FOR QUASICONCAVA.

MONTANDO A MATRIZ HESSIANA ORLADA.

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & f_K & f_L \\ f_K & f_{KK} & f_{KL} \\ f_L & f_{KL} & f_{LL} \end{bmatrix}$$

$n = 2$ Z, NÚMERO DE VARIÁVEIS

$n - 1 = 2 - 1 = 1$. OU SEJA, DEVE-SE ANALISAR UM MENOR PRINCIPAL LÍDER QUE NESSE CASO É A PRÓPRIA MATRIZ:

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & f_K & f_L \\ f_K & f_{KK} & f_{KL} \\ f_L & f_{KL} & f_{LL} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{12} \cdot \Delta_{12} + a_{13} \cdot \Delta_{13}$$

$$= (0) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} + f_K (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} + f_L (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{13}$$

$$= -f_K \cdot \begin{vmatrix} f_K & f_{KL} \\ f_L & f_{LL} \end{vmatrix} + f_L \begin{vmatrix} f_K & f_{KK} \\ f_L & f_{KL} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 |H| &= -f_K (f_{KK} f_{LL} - f_{KL}^2) + f_L (f_{KL} f_{KK} - f_{KK} f_L) \\
 &= -f_K^2 f_{LL} + f_K f_L f_{KL} + f_K f_L f_{KL} - f_L^2 f_{KK} \\
 &= -f_K^2 f_{LL} + 2 f_K f_L f_{KL} - f_L^2 f_{KK}
 \end{aligned}$$

UMA VEZ QUE $f_{LL} \text{ E } f_{KK} < 0$ E $f_{KL} > 0$ IMPLICA QUE A MATRIZ HESSIANA ORLADA É POSITIVA E, SENDO ASSIM, A FUNÇÃO É QUASI-CONCAVA.

PROVANDO A CONVEXIDADE DO CONJUNTO DE ISOQUANTAS:

SEJA x_1 E $x_2 \in Q(Y)$, ENTÃO $f(x_1) \geq Y$ E $f(x_2) \geq Y$. SE $f(\cdot)$ É QUASICONCAVA, ISTO É:

$f(x^t) \geq \min \{f(x_1), f(x_2)\} = f(x_1) = f(x_2) \geq Y$ IMPLICA QUE $f(x^t) \geq Y$, LOGO, $x^t \in Q(Y)$ E UMA VEZ QUE $x^t = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, ENTÃO $Q(Y)$ É CONVEEXO.

EXERCÍCIO 14:

$$Y = A \cdot f(K, L)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} &= \dot{A} f(K, L) + A \cdot \dot{f} \\
 &= \dot{A} f(K, L) + A \left(\frac{\partial f}{\partial K} \cdot \dot{K} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \dot{L} \right)
 \end{aligned}$$

TAXA DE CRESCIMENTO DO PRODUTO NO TEMPO É DADA POR: $\frac{\dot{Y}}{Y}$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} f + \frac{A}{Y} \left(\frac{\partial f}{\partial K} \cdot \dot{K} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \dot{L} \right)$$

$$= \frac{\dot{A}}{A} f + \frac{A}{A f} \left(\frac{\partial f}{\partial K} \cdot \dot{K} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \dot{L} \right)$$

$$= \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial f}{\partial K} \cdot \frac{\dot{K}}{f} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{\dot{L}}{f}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial f}{\partial K} \cdot \frac{K}{f} \cdot \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{L}{f} \cdot \frac{\dot{L}}{L}$$

76.A

$$\boxed{= \frac{\dot{A}}{A} + \epsilon_K \cdot \frac{\dot{K}}{K} + \epsilon_L \cdot \frac{\dot{L}}{L}}$$